

# اجماع و بهبود نرخ همگرایی در شبکه های پهنای توزیع شده مبتنی بر گراف در حضور نویز تصادفی

مصطفی امیری<sup>۱\*</sup>، بهراد محبوبی<sup>۲</sup>

۱- کارشناس ارشد رشته برق - مخابرات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

۲- استادیار دانشکده مهندسی برق دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

## چکیده

شبکه های توزیع شده مبتنی بر اجماع سیستم هایی هستند که به منظور رسیدن به یک مقدار مشترک، از محاسبات و ارتباطات محلی مابین گره های شبکه بهره می گیرند. در این شبکه ها، اجماع به معنای دستیابی به توافق در مورد یک مقدار مشخص مورد علاقه است که به وضعیت همه عوامل بستگی دارد. الگوریتم اجماع یک ضابطه درون شبکه ای است که تبادل اطلاعات بین یک عامل و همه همسایه های آن را در شبکه مشخص می کند. در این تحقیق سعی شده است ضمن بیان مفهوم اجماع در شبکه های پهنای توزیع شده، اثرات عوامل نامطلوب (نویز، محوشدگی و ...) بر الگوریتم های اجماع را بیان نماییم. در این تحقیق با در نظر گرفتن سیگنال های برداری شده، کنترل اجماع میانگین برای شبکه های زمان گسسته ی با عامل های درجه یک و با توپولوژی ثابت و متغیر جهت دار مورد بررسی قرار گرفته است و سپس بعد از شبیه سازی های انجام گرفته نتایج حاصل و نحوه بهبود نرخ همگرایی پهنای توزیع را با کارهای قبیل که از سیگنال های اسکالر بهره گرفته شده مقایسه گردیده است. از آنجا که برای طراحی ورودی های کنترلی شبکه، داده های هر عامل (پهنای)، از ادغام وضعیت محلی آن عامل با وضعیت عامل های همسایه که متأثر از نویز ارتباطی تصادفی است حاصل می شود، شرایط لازم و کافی برای رسیدن به اجماع میانگین این پروتکل ها برای توپولوژی ثابت و متغیر جهت دار شرح داده شده است و واژه های کلیدی: شبکه چند عامله، شبکه توزیع شده، اجماع، تئوری گراف

## Consensus and Convergence Rate Optimization in Distributed Drone Networks in The Presence of Random Noise

### Abstract

Distributed consensus networks are systems that use calculations and local communication between network nodes in order to reach a common value. In these networks, consensus means reaching an agreement on a specific value of interest that depends on the state of all agents. The consensus algorithm is a protocol that determines the exchange of information between an agent and all its neighbors in the network. In this research, while expressing the concept of consensus in distributed networks, we have tried to express the effects of adverse factors (noise, fading ...) on consensus algorithms. Also in this research, considering the vectored signals, average consensus control for discrete-time networks with first-order agents and for fix and switching directional topology has been investigated, and then by simulation, the results and the convergence rate has been compared with previous works that used scalar signal. Since for the design of the control inputs of the network, the data of each agent (drone) is obtained from the integration of the local state of that agent with the state of the neighboring agents which is affected by random communication noise, the necessary and sufficient conditions to reach the average consensus for the fixed and switching directional topology has been obtained.

**Key words:** multi-agent network, distributed network, consensus, drone, graph theory

شده از عامل‌ها به عنوان کانل‌های ارتباطی بین گره‌ها تشکیل شده است. معمولاً شبکه توزیع شده از اجرای همزمان برنامه استفاده می‌کند و اجزاء برای دستیابی به یک هدف مشترک با یکدیگر تعامل دارند. شبکه‌های توزیع شده مبتنی بر اجماع سیستم‌هایی هستند که به منظور رسیدن به یک مقدار مشترک، از محاسبات و ارتباطات محلی مابین گره‌های شبکه بهره می‌گیرند. در این شبکه‌ها، اجماع به معنای دستیابی به توافق در مورد یک مقدار مشخص مورد علاقه است که به وضوح همه عوامل بستگی دارد. الگوریتم (پروتکل) اجماع یک ضابطه درون شبکه است که تبادل اطلاعات بین یک عامل و همه همسایه‌های آن را در شبکه مشخص می‌کند. در بسیاری از کاربردها که شامل چنین سیستم‌های چند عاملی هستند، عامل‌ها باید درباره یک مقدار یا مقادیر خاص به توافق برسند. به فرایند رسیدن به اجماع همگرایی و به سرعت رسیدن به اجماع نرخ همگرایی می‌گویند. در حالت حاضر، روش‌های اجماع مختلفی برای بسیاری از کاربردها وجود دارد. این روش‌ها عموماً بر توافق بر روی برخی پارامترهای اجماع مانند زاویه حرکت یا زمان قرار در مثال‌های قبلی تمرکز می‌کنند و به دنبال دستیابی به میانگین تخمین‌های اولیه عامل‌ها (احتمالاً وزن‌دهی شده) هستند. این نوع اجماع اغلب اجماع میانگین (AC) نامیده می‌شود. هنگامی که مقدار ثابتی در ناوگان به دست آمد، هر عامل می‌تواند به صورت محلی طوری برنامه ریزی کند تا در حالت مطلوب خود باقی بماند. ما در این تحقیق یک الگوریتم اجماع میانگین توزیع شده در زمان گسسته را در شبکه‌های چند عامله با توپولوژی ثابت و متغیر با زمان در حضور نویزهای اندازه‌گیری مورد بررسی قرار می‌دهیم و شرایط لازم برای حصول به اجماع میانگین مربع را بدست می‌آوریم.

بخش‌های مختلف این تحقیق به این شرح است: از آنجا که ساختار یک شبکه چند عامله به همراه لینک‌های مابین آنها بوسیله گراف نمایش داده می‌شود در بخش دوم مقدماتی در مورد ساختار و ماتریس‌های حاکم بر گراف‌ها بیان می‌شود. در بخش سوم مسئله اجماع و نرخ همگرایی در شبکه‌های توزیع شده گسسته و در حضور نویز را شرح و روابط و قضایای آن را برای داده‌های اسکالر ذکر می‌نماییم. در بخش چهارم روابط و قضایای بخش قبلی را به داده‌ها و اطلاعات برداری شده تعمیم داده و آن روابط را برای توپولوژی ثابت و متغیر بیان می‌نماییم و در بخش پنجم نتایج و نمودارهای

در سال‌های اخیر شبکه‌های توزیع شده از عوامل پویا محققان زیادی را به خود جلب نموده است. این امر به دلیل کاربردهای گسترده سیستم‌های چند عاملی در بسیاری از حوزه‌ها از جمله هماهنگی عملیاتی مابین دسته‌ای<sup>۱</sup> از ماهواره‌ها، کنترل تراکم در شبکه‌های ارتباطی [۱]، پرواز گروهی و همکاری مابین پهپادها (UAVs) [۲] و شبکه‌های سنسوری توزیع شده [۳] است. توسعه و استفاده از شبکه‌های ارتباطی سریع و قابل اعتماد جهان را کوچک کرده و امکان همکاری بین گوشه و کنار جهان را فراهم کرده است. مسئله توافق بین شبکه‌هایی از عامل‌ها، تمرکز اصلی زمینه اجماع است. به طور خاص، افزایش خودکنترلی وسایل بدون سرنشین این امکان را می‌دهد که برخی تصمیمات، مستقل از اپراتورهای انسانی گرفته شود. به دلیل مقیاس‌پذیری و استحکام آنها در برابر شکست‌های فردی، داشتن انبوهی از "پهپادها" که بتوانند به طور خودکار اهداف را در مناطق مورد نظر جستجو و ردیابی کنند، باعث می‌شود تعداد کمتری از اپراتورهای انسانی بتوانند بر گروه‌های بزرگتری از وسایل نظارت کنند، بنابراین در زمان و هزینه صرفه جویی می‌شود. با این حال، انجام این کار اغلب به هماهنگی از طریق به اشتراک‌گذاری اطلاعات مشترک بستگی دارد. به عنوان مثال، پرواز گروهی مستلزم آن است که همه عوامل از موقعیت سایر عوامل و شکل بندی مورد نظر آگاهی داشته باشند. اگر یک عامل در مورد سرفصل مورد نظر به توافق نرسد، تشکیلات متلاشی می‌شود. این سیستم‌ها غالباً به دو صورت متمرکز و توزیع شده هستند. شبکه‌های متمرکز سیستم‌هایی هستند که از معماری سرویس‌گیرنده/سرور استفاده می‌کنند که در آن یک یا چند گره به طور مستقیم به یک سرور مرکزی متصل هستند. این رایج‌ترین نوع سیستم در بسیاری از کاربردها است که در آن گره‌ها تمامی داده‌های خود را به سرور ارسال می‌کنند و پاسخ را دریافت می‌کنند. با توپولوژی متمرکز، شبکه یک واحد مرکزی را انتخاب می‌کند و هر گره داده‌های خوانده شده خود را به مرکز ارسال می‌کند که سپس هرگونه پردازش یا محاسبه لازم در آن واحد انجام می‌شود و سپس در صورت نیاز نتایج حاصل را به همه گره‌ها پخش می‌کند.

در مقابل شبکه‌های متمرکز شبکه‌ی توزیع شده قرار دارد. سیستم توزیع شده سیستمی است که اجزای آن در گره‌های مختلف شبکه با ارسال پیام به یکدیگر، ارتباطات خود را با یکدیگر هماهنگ می‌کنند. بنابراین منطقی است که معماری توزیع شده را جایگزین معماری متمرکز در نظر بگیریم، جایی که هیچ گره‌ای نقش اصلی را بر عهده نمی‌گیرد و هر گره در اصل همان ارتباطات و محاسبات را انجام می‌دهد. به طور معمول، یک سیستم توزیع

1 Average consensus

2 Distributed network

3 Dynamic agents

4 Cluster

5 centralized

6 distributed

7 agents

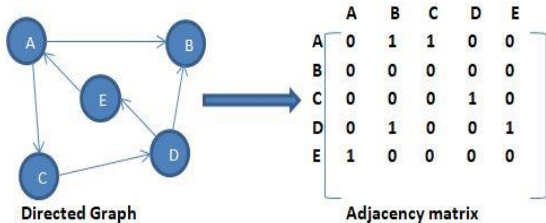
8 Consensus

شبیه سازی را برای شبکه های با گره و یال های مختلف بیان و بهبود نرخ همگرایی در موارد انجام شده را مورد بررسی قرار می دهیم.

## ۲- تئوری گراف

با توجه به اینکه ساختار یک شبکه چند عامله به همراه ارتباطات مابین آنها بوسیله گره ها و یال های یک گراف (جهت دار یا بی جهت) نمایش داده می شود، لذا در این بخش مقدماتی را در مورد تئوری گراف بیان می کنیم. از نظر مفهومی، یک گراف توسط رئوس (گره) و یال های متصل به رئوس تشکیل می شود. به طور تئوری، یک گراف را با مجموعه  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$  نمایش می دهند، بطوریکه  $\mathcal{V}$  مجموعه رئوس یا گره و  $\mathcal{E}$  مجموعه یال های آن می باشد که دو گره را به هم متصل می کند (شکل ۱).

ماتریس مجاورتی گراف  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$  را با نماد  $A$  نمایش می دهند. ماتریس مجاورتی یک ماتریس  $n \times n$  است که  $n$  تعداد گره های گراف می باشد. برای یک گراف جهت دار درایه ی آن  $a_{ij}$  برابر است با تعداد یالهایی که از گره  $v_i$  خارج و به  $v_j$  وارد می شود. لازم به ذکر است در بعضی منابع [۶] داریم: درایه  $a_{ij} > 0$  اگر گره  $v_j$  همسایه گره  $v_i$  باشد در غیر این صورت داریم  $a_{ij} = 0$ . (شکل ۲)



شکل ۲- ماتریس مجاورتی یک گراف

در یک گراف جهت دار درجه ورود یک راس تعداد یال هایی است که به آن راس وارد می شود و با  $\deg_{in}(v)$  نمایش می دهند. حال با توجه به این تعریف، ماتریس درجه  $D$  برای یک گراف جهت دار با  $N$  راس، یک ماتریس قطری است به طوریکه [۶]:

$$D = \text{diag}(\deg_{in}(1), \dots, \deg_{in}(N)) \quad (1)$$

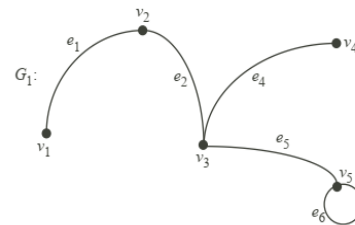
ماتریس لاپلاسین گراف  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_G)$  را با نماد  $L$  نمایش می دهند. گراف ساده  $G$  را با  $N$  راس در نظر بگیرید، ماتریس لاپلاسین  $L_{N \times N}$  به صورت  $L = D - A$  تعریف می شود که  $D$  ماتریس درجه و  $A$  ماتریس مجاورتی گراف است. ماتریس لاپلاسین یک ماتریس نیمه معین مثبت است در نتیجه مقادیر ویژه آن به صورت زیر می باشد:

$$0 = \lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_N(L) \quad (2)$$

برای یک گراف همبند داریم:  $\lambda_2(L) > 0$ . به این مقدار مقدار فیدلر (Fiedler) یا اتصال جبری شبکه می گویند [۷].

## ۲-۳- انواع توپولوژی شبکه های گراف

در شبکه های با توپولوژی ثابت تعداد گره ها، یال ها و نحوه ارتباطات آنها در طول زمان اجرای الگوریتم اجماع ثابت است و هیچگونه تغییری در ساختار و توپولوژی گراف شبکه رخ نمی دهد. برای توصیف بهتر یک توپولوژی متغیر شبکه ای با عامل های متحرک را در نظر بگیرید که با یکدیگر در ارتباط هستند و باید در مورد هدف خاصی که مورد علاقه آنهاست توافق کنند یا همگام سازی را انجام دهند. از آنجا که گره های شبکه در حال حرکت هستند، تصور اینکه برخی از لینک (یال) های ارتباطی موجود بین دو عامل به دلیل وجود مانع از بین بروند،



شکل ۱- گراف با یال های وزن دهی شده

## ۲-۱- گراف جهت دار و بدون جهت

به صورت مفهومی، یک گراف جهت دار توسط رئوس متصل شده توسط یال های جهت دار تشکیل می شود. به طور رسمی، یک گراف جهت دار مانند یک گراف معمولی  $G = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_G\}$  است به طوریکه  $\mathcal{V}$  مجموعه رئوس و  $\mathcal{E}$  همان مجموعه یال ها است با این تفاوت که جهت مرتب شده  $(u, v)$  در  $\mathcal{E}$  بیانگر اتصال راس  $u$  به راس  $v$  است. در گراف جهت دار راس را همسایه  $u$  می نامند اگر  $(u, v) \in \mathcal{E}$  موجود باشد. در یک گراف، مسیر  $a$  از گره  $u$  به گره  $v$  عبارت است از دنباله یال های  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  که از گره  $u$  شروع و به گره  $v$  ختم می شود. و داریم:  $a: u \rightarrow v$ . یک مسیر را ساده می نامیم اگر هر گره در طول مسیر تنها یک بار ظاهر شود. درخت یک گراف جهت دار یا بدون جهت است که بین هر دو گره آن تنها یک مسیر موجود باشد همچنین درختی است که شامل همه رئوس یک گراف باشد درخت پوشا می نامیم.

## ۲-۲- ماتریس های گراف

یک نمایش پرکاربرد برای گراف ها، استفاده از ماتریس ها است [۴]. در ادامه به بعضی از مهمترین ماتریس های یک گراف اشاره می کنیم [۵].

اجماع با این ویژگی خاص نامتغیر را "الگوریتم اجماع میانگین" می-نامند [10]. دینامیک سیستم (۱) را می توان به صورت برداری به فرم زیر نمایش داد:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{L}\mathbf{x} \quad (7)$$

که  $\mathbf{L}$  ماتریس لاپلاسیان گراف  $\mathcal{G}$  است. و داریم

$$\mathbf{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} \quad (8)$$

با توجه به تعریف بالا ماتریس  $\mathbf{L}$  یک بردار ویژه سمت راست  $\mathbf{1}$  که مرتبط با مقدار ویژه صفر است دارد زیرا  $L_1 = 0$ . برای گراف های بدون جهت ماتریس لاپلاسیان گراف، ویژگی جمع مربعات (SOS) که در ادامه آمده است را ارضا می کند:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} a_{ij} (x_j - x_i)^2 \quad (9)$$

با تعریف تابع عدم توافق درجه دوم به فرم زیر:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} \quad (10)$$

آشکار می شود که الگوریتم (۱) مشابه  $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla \varphi(\mathbf{x})$  یا الگوریتم gradient-descent است. این الگوریتم به طور عمومی همگرایی مجانبی به فضای توافق دارد به نحوی که دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) ماتریس  $\mathbf{L}$  ماتریس positive semidefinite است.

(ب) تنها موازنه رابطه (۵) همان  $\alpha \mathbf{1}$  است.

هر دوی این شروط برای گراف همبند(متصل) برقرار است و از ویژگی SOS در رابطه ی (۹) پیروی می کند بنابراین یک اجماع میانگین مجانبی برای تمام حالت های اولیه بدست می آید. این حقیقت در قضیه زیر خلاصه شده است:

قضیه (۱): گراف  $\mathcal{G}$  همبند و بدون جهت است. آنگاه الگوریتم (۱) به طور مجانبی مسئله اجماع میانگین را برای تمام حالت اولیه حل می کند [11].

برای یک گراف بدون جهت، ماتریس  $\mathbf{L}$  ماتریس متقارن و با مقادیر ویژه حقیقی است. پس مجموعه مقادیر ویژه  $\mathbf{L}$  به طور نزولی به قرار زیر مرتب می شوند:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq 2\Delta \quad (11)$$

مقدار ویژه صفر به عنوان مقدار ویژه بدیهی ماتریس  $\mathbf{L}$  شناخته می شود. برای یک گراف همبند  $\lambda_2 > 0$  است (به این مفهوم که مقدار ویژه صفر جدا است). دومین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسیان ( $\lambda_2$ ) فاکتور algebraic connectivity گراف  $\mathcal{G}$  نامیده می شود [۱۲].  $\lambda_2$  توپولوژی شبکه، مقدار سرعت / کارایی الگوریتم های اجماع را مشخص می کند [۱۳].

دشوار نیست. در چنین شرایطی در حالیکه لینک های جدیدی ممکن است برقرار گردد از طرفی ممکن است به علت افزایش فاصله بین برخی از گره ها لینک هایی نیز از بین رود. از نظر توپولوژی شبکه، این بدان معناست که تعداد مشخصی از یال های گراف اضافه یا حذف می شوند. ما به چنین شبکه هایی شبکه ی با توپولوژی متغیر می گوئیم [۸].

### ۳- اجماع و نرخ همگرایی در شبکه های توزیع شده چند عامله

#### ۳-۱- اجماع در داده ها

یک شبکه چند عامله را با دینامیک  $\dot{x}_i = u_i$  بر روی گراف  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  در نظر می گیریم. این شبکه علاقه دارد تا به وسیله ارتباطات محلی هر گره با گره های همسایه خود، به اجماع برسد. با رسیدن به اجماع ما همگرایی مجانبی را در یک فضای توافق یک بعدی که بوسیله رابطه زیر بیان می گردد معنی می کنیم:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad (3)$$

این فضای توافق به صورت  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{1}$  نشان داده می شود که داریم  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$  و  $\alpha$  را تصمیم جمعی (collective decision) گره ها می نامیم. مجموعه ی همسایه های عامل  $i$  را با  $\mathcal{N}_i$  نشان می دهیم و داریم:

$$\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : a_{ij} \neq 0\}, \quad \mathcal{V} = \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

عامل  $i$  با عامل  $j$  ارتباط دارد (داده ارسال می کند) اگر عامل  $j$  همسایه  $i$  یا  $(a_{ij} \neq 0)$  باشد.

گراف Dynamic  $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t))$  گرافی است که متغیر با زمان هستند. در مرجع [9] نشان داده شده است که سیستم خطی

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (5)$$

الگوریتم اجماع توزیع شده است. به این معنی که همگرایی به یک تصمیم جمعی را با استفاده از تبادلات بین عامل ها تضمین می کند. با فرض بدون جهت بودن گراف مورد نظر ( $a_{ij} = a_{ji}$  for all  $i, j$ ) مجموع حالت های تمام گره ها یک پارامتر بدون تغییر است یا  $\sum_i \dot{x}_i = 0$ . مخصوصا اعمال این شرط در زمان های  $t = 0$  و  $t = \infty$  نتیجه زیر را به دنبال دارد:

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_i x_i(0) \quad (6)$$

به عبارت دیگر اگر اجماع به طور تقریب حاصل شود آنگاه لزوما تصمیم جمعی برابر با میانگین مقادیر اولیه تمام گره ها می باشد. یک الگوریتم

### ۳-۲- اجماع در شبکه‌های زمان گسسته

رابطه‌ی زیر فرم تکرارپذیر از الگوریتم اجماع را در حالت زمان گسسته نشان می‌دهد

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)) \quad (12)$$

بطوریکه  $x_i(k)$  وضعیت گره  $i$  را در زمان  $k$  نشان می‌دهد. دینامیک جمعی زمان گسسته یک شبکه تحت این الگوریتم به صورت زیر است

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) \quad (13)$$

که  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{L}$  (ماتریس یکانی است) و  $\varepsilon > 0$  گام یا همان (step-size) است.

**تئوری ۲)** شبکه‌ای از عامل‌ها به فرم  $x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k)$  را با توپولوژی  $\mathcal{G}$  را در نظر بگیرید به طوری که الگوریتم اجماع توزیع شده زیر به آن اعمال شده است.

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)) \quad (14)$$

که  $0 < \varepsilon < 1/\Delta$  و  $\Delta$  ماکزیمم درجه شبکه است. گراف جهت‌ی  $\mathcal{G}$  را قویاً همبند در نظر گرفته ایم. آنگاه داریم:

(الف) یک اجماع مجانبی برای همه حالات اولیه حاصل می‌شود.

(ب) مقدار تصمیم جمعی برابر با  $\alpha = \sum_i w_i x_i(0)$  است که

$$\sum_i w_i = 1$$

(ج) اگر گراف جهت‌ی متعادل باشد یک اجماع میانگین مجانبی حاصل می‌شود و داریم:

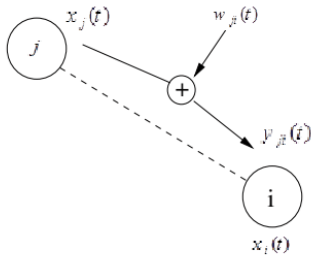
$$\alpha = (\sum_i x_i(0)) / N$$

اثبات این تئوری در مرجع [۱۱] آورده شده است.

### ۳-۳- شرایط اجماع در شبکه‌های توزیع شده چند عامله در حضور نویز

در شبکه‌های واقعی، انواع مختلفی از عوامل نامشخص مانند نویز کانال، محو شدگی (fading) کانال و خرابی‌های تصادفی لینک‌ها وجود دارد. نویز اندازه‌گیری<sup>۱</sup> یا ارتباطات نه تنها به صورت جداگانه بر فرایند تصمیم‌گیری هر عامل تاثیر دارد بلکه بر عملکرد کل سیستم نیز اثر می‌گذارد. به صورت کلی نویز اندازه‌گیری یا ارتباطات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: نویز افزودنی (Additive) و نویز ضربی (Multiplicative). نویز افزودنی بدون در نظر گرفتن شدت سیگنال‌ها، سیگنال‌ها را به صورت superposition خراب می‌کند در حالیکه نویز ضربی مکانیزم متفاوتی دارد که می‌تواند توسط کوپلینگ آن با سیگنال‌ها نشان داده شود. در این تحقیق ما کنترل اجماع میانگین برای شبکه‌های زمان گسسته‌ی با عامل‌های درجه

یک و توپولوژی جهتدار را بررسی می‌کنیم. اطلاعات قابل دسترس برای هر عامل به جهت طراحی ورودی کنترلی، از ادغام وضعیت محلی هر عامل با وضعیت عامل‌های همسایه که توسط نویز ارتباطی تصادفی تحت تاثیر قرار گرفته بدست می‌آید. (شکل ۳).



شکل ۳- ادغام نویز بر روی ارتباطات دو گره

نویزهایی که در این کار مورد بررسی قرار می‌گیرد از نوع تفاضلات مارتینگل با ممان مرتبه دوم یکنواخت و ممان‌های مرتبه دوم شرطی متناهی است که به عنوان نمونه خاص شامل نویزهای گوسی و محدود است که در مقایسه با دیگر کارهای انجام شده مانند [۱۴]، [۱۵] و [۱۶] در اینجا مستقل بودن نویز کانال‌های ارتباطی مورد نیاز نیست. در این کار از یک تابع بهره الگوریتم متغیر با زمان برای کاهش اثر نویزها استفاده شده است. یک شبکه توزیع شده چند عامله را با  $N$  عامل (گره) در نظر داریم. ساختار شبکه مورد نظر را با یک گراف جهتدار  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  بیان می‌کنیم بطوریکه  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  مجموعه گره‌های شبکه گراف است.  $\mathcal{E}$  مجموعه یال‌های بین گره‌های شبکه است بطوریکه  $(j, i) \in \mathcal{E}$  یعنی گره  $j$  به گره  $i$  مستقیماً اطلاعات ارسال می‌کند. همچنین از بخش قبل داریم که ماتریس  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  را نیز ماتریس همسایگی (مجاورتی) گراف می‌نامیم. همسایه‌های گره  $i$  را با  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$  نمایش می‌دهیم و برای ماتریس همسایگی داریم اگر  $a_{ij} > 0$  آنگاه  $j \in \mathcal{N}_i$  یعنی گره  $j$  می‌تواند به گره  $i$  اطلاعات ارسال کند و اگر  $a_{ij} = 0$  اگر  $j \notin \mathcal{N}_i$ . گره‌های شبکه مورد نظر در زمان  $t = 0$  مقادیر اولیه را از محیط، اندازگیری کرده و هر گره مطابق با ساختار جهت‌ی گراف شبکه، اطلاعات خود را به گره‌های همسایه ارسال و همزمان داده‌های گره‌های همسایه را دریافت می‌کند. با توجه به اینکه فرض ما بر این است کانال ارتباطی مابین گره‌ها دارای نویز است پس هر گره نسخه‌ای نویزی از اطلاعات خود را برای گره‌های همسایه ارسال و به طبع داده‌های نویزی شده‌ای نیز از همسایگان خود دریافت می‌کند. هدف ما این است که با در نظر گرفتن فرضیات و شروط لازم بر مسئله تمامی گره‌های شبکه بعد از تکرار با دفعات زیاد روند ارسال و دریافت داده‌ها، هر گره به یک مقدار مشترک که همان میانگین مقادیر اولیه گره‌ها است همگرا شود.

<sup>۱</sup>- Measurement noises

### ۳-۳-۱- شبکه‌های با توپولوژی ثابت

نویز موجود بر روی کانل‌های شبکه مورد نظر را AWGN خواهد بود. لذا با جاگذاری پروتکل (۱۲) در (۱۰) داریم:

$$\mathbf{x}(t+1) = [\mathbf{I}_N - a(t)\mathbf{L}] \mathbf{x}(t) + a(t)\mathbf{D}_G \mathbf{W}(t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (21)$$

که  $\mathbf{D}_G = (\alpha_1^T, \dots, \alpha_N^T)$  ماتریس بلوکی قطری با ابعاد  $N \times N^2$  است که  $\alpha_i$  ردیف  $i$ ام از  $\mathbf{A}$  است.

$$\mathbf{W}(t) = [w_1^T(t), \dots, w_N^T(t)]^T \quad \text{بطوریکه:} \quad (22)$$

$$w_i(t) = [w_{1i}(t), \dots, w_{Ni}(t)]^T$$

ما به مفروضات زیر نیاز داریم:

(A1): گراف  $\mathcal{G}$  گراف جهت دار متعادل است.

(A2): گراف  $\mathcal{G}$  شامل درخت پوشا است.

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty \quad (A3)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0. \quad (A3a)$$

**تئوری ۲** پروتکل (۱۲) را به سیستم (۱۱)-(۱۰) اعمال می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مفروضات (A1)، (A2) و (A3a) برقرار است. آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[V(t)] = 0, \quad \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^N \quad (22)$$

آنگاه رابطه‌ی (۱۲) پروتکل اجماع ضعیف میانگین مربع است [15]. در

اینجا  $V(t) = \left\| \left( \mathbf{I}_N - (1/N)\mathbf{1}\mathbf{1}^T \right) \mathbf{x}(t) \right\|^2$  تابع انرژی خطای اجماع نامیده می‌شود. (اثبات در ضمیمه)

**تئوری ۳** پروتکل (۱۹) را به سیستم (۱۵) و (۱۶) اعمال می‌کنیم اگر فرضیات (A1)-(A3) برقرار باشد آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[x_i(t) - x^*]^2 = 0, \quad (23)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^N$$

که  $x^*$  یک متغیر تصادفی وابسته به  $\mathbf{W}$  است و  $\mathbf{x}(0)$  رابطه‌ی زیر را ارضا می‌کند.

$$E(x^*) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0),$$

$$\text{var}(x^*) \leq \frac{\sigma_W^* |\mathcal{E}_G| \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij}^2}{N^2} \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t). \quad (24)$$

$$\sigma_W^* = \max_{(j,i) \in \mathcal{E}_G} \sup_{t \geq 0} E[w_{ji}(t)]^2$$

یعنی (۱۲) یک پروتکل اجماع میانگین مربع بدون بایاس مجانبی است. تئوری‌های (۲) و (۳) نشان می‌دهد که در توپولوژی ثابت فرضیات (A1) تا (A3) شرط کافی برای اطمینان از اجماع ضعیف میانگین مربع و اجماع میانگین مربع بدون بایاس مجانبی است. فرض (A2) تا حدی همبند بودن شبکه را تضمین می‌کند یعنی  $\lambda_2(\mathbf{L}) > 0$ .

ما اجماع میانگین برای شبکه‌ای از عامل‌های مرتبه اول گسسته را با دینامیک زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u_i(t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

که  $x_i(t)$  و  $u_i(t)$  به ترتیب وضعیت جاری و ورودی کنترلی عامل  $i$  ام است. در رابطه بالا برای سادگی  $x_i(t)$  و  $u_i(t)$  اسکالر در نظر گرفته شده‌اند و مقادیر اولیه عامل (گره‌ها) با  $x_i(0)$  نشان داده می‌شود. عامل  $i$  ام می‌تواند اطلاعات را از همسایه‌های خود دریافت کند:

$$y_{ji}(t) = x_j(t) + w_{ji}(t), \quad j \in N_i \quad (16)$$

که  $y_{ji}(t)$  مقدار اندازه‌گیری شده وضعیت عامل  $j$  ام ( $x_j(t)$ ) توسط عامل  $i$  ام است و  $\{w_{ji}(t), i, j = 1, 2, \dots, N\}$  نویز ارتباطی ما بین دو گره می‌باشند. گراف  $\mathcal{G}$  ساختار جریان اطلاعات را در سیستم (۱۰) نشان می‌دهد که به آن گراف جریان اطلاعات یا گراف توپولوژی شبکه سیستم (۱۰) می‌گویند و داریم

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N \quad (17)$$

و معمولاً  $(\mathcal{G}, \mathbf{x})$  شبکه پویا نامیده می‌شود. اگر  $u_i(t)$  فقط به وضعیت عامل  $i$  ام و measurement وضعیت‌های همسایه‌های آن بستگی داشته باشد، به گروه کنترل‌های  $\mathcal{U} = \{u_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  پروتکل توزیع شده مبتنی بر measurement می‌گوییم یعنی:

$$u_i(t) \in \sigma \left( \bigcup_{s=0}^t \sigma(x_j(s), y_{ji}(s), j \in N_i) \right), \quad (18)$$

$$\forall t = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

اصطلاح کنترل اجماع میانگین به معنای طراحی یک پروتکل توزیع شده برای شبکه پویا  $(\mathcal{G}, \mathbf{x})$  است، به گونه‌ای که برای هر مقدار اولیه  $\mathbf{x}(0)$  وضعیت همه عوامل به  $(1/N) \sum_{j=1}^N x_j(0)$  همگرا می‌شوند بطوریکه  $t \rightarrow \infty$ ، بتوان  $(1/N) \sum_{j=1}^N x_j(0)$  را در یک مسیر توزیع شده محاسبه کرد. در این حالت  $(1/N) \sum_{j=1}^N x_j(0)$  مقدار تصمیم گروه نامیده می‌شود.

ما برای شبکه پویا  $(\mathcal{G}, \mathbf{x})$  از پروتکل توزیع شده زیر استفاده می‌کنیم:

$$u_i(t) = a(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_{ji}(t) - x_i(t)), \quad (19)$$

$$t = 0, 1, \dots$$

که  $a(t) > 0$  بهره اجماع یا step-size نامیده می‌شود. اگر گراف  $\mathcal{G}$  متعادل باشد آنگاه رابطه (۲۰) تابع پتانسیل لاپلاسی مرتب با نامیده می‌شود [5] که میزان درجه انحراف بین وضعیت عامل‌های مختلف را نشان می‌دهد.

$$V_G \triangleq \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = (1/2) \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - x_i)^2 \quad (20)$$

$$u_i(t) = a(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij}(t)(y_{ji}(t) - x_i(t)), \quad (27)$$

$$\forall t = 0, 1, \dots$$

که  $a_{ij}(t)$  المان سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام  $\mathcal{A}_{G(t)}$  است. همچنین:

$$y_{ji}(t) = x_j(t) + w_{ji}(t), \quad (28)$$

$$j \in \mathcal{N}_i(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

که  $u_i(t)$  مطابق با  $\sigma(x_i(t), y_{ji}(t), j \in \mathcal{N}_i(t))$  پروتکل توزیع شده است.

با جاگذاری رابطه (27) در (15) داریم:

$$\mathbf{x}(t+1) = [\mathbf{I}_N - a(t)\mathbf{L}]\mathbf{x}(t) + a(t)\mathbf{D}_{G(t)}\mathbf{W}(t), \quad (29)$$

$$t = 0, 1, \dots$$

#### ۴- سیگنال‌های با مقادیر برداری

در این بخش همانند بخش‌های قبل ما کنترل اجماع میانگین را برای شبکه‌های زمان گسسته‌ی با عامل‌های درجه یک و توپولوژی جهت دار به دست می‌آوریم. گراف شبکه مورد نظر ما متعادل است و همانند کارهای اشاره شده در قبل اطلاعات قابل دسترس برای هر عامل به جهت طراحی ورودی کنترلی از ادغام وضعیت محلی هر عامل با وضعیت عامل‌های همسایه که توسط نويز ارتباطی تصادفی تحت تاثیر قرار گرفته بدست می‌آید. نوع‌آوری که در این کار انجام شده است بر خلاف کارهای قبلی که عامل‌ها مقادیر اسکالر را از محیط بیرون (در لحظه صفر) و عامل‌های همسایه دریافت می‌کردند، در روش پیشنهادی ما عامل‌ها مقادیر اولیه و داده‌هایی که از گره‌های همسایه دریافت می‌کنند به صورت یک بردار  $M$  مولفه ای است. می‌توان گفت هر گره چندین کمیت را به طور موازی و هم‌زمان اندازه می‌گیرد یا از گره‌های همسایه دریافت می‌کند. این امر باعث می‌شود که تمامی روابط و قضایایی که در بخش قبل به صورت اسکالر بر مسئله حاکم بود در این بخش به صورت برداری و یا ماتریسی بیان گردد. با توجه به استفاده از داده‌ها و مقادیر برداری توسط گره‌ها نشان می‌دهیم که پروتکل طراحی شده باز هم می‌تواند تضمین کند که وضعیت هر عامل به صورت جداگانه در حالت میانگین مربع به یک بردار متغیر تصادفی مشترک همگرا می‌شود که امید ریاضی آن میانگین، بردار وضعیت‌های اولیه کل سیستم است. در حقیقت این شرط از جهاتی برای اجماع میانگین مربع بدون بایاس ضروری و کافی است.

#### ۴-۱- فرمولاسیون مسئله

در بخش قبل میانگین اجماع برای شبکه ای از عوامل مرتبه اول گسسته را با پویایی زیر معرفی کردیم:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u_i(t), \quad (30)$$

$$t = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, N$$

بطوریکه عامل‌های مختلف به طور مجانبی به توافق می‌رسند. فرض (A1) برای اطمینان از این است که میانگین وضعیت گره‌ها حول  $(1/N)\sum_{j=1}^N x_j(0)$  می‌شود به طوریکه می‌توان به یک اجماع میانگین دست یافت. فرض (A3) قاعده‌ی اولیه تقریب تصادفی استاندارد است. از اثبات تئوری (۲) می‌توان دریافت که شرط  $\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty$  از اینکه خطای اجماع با یک نرخ مشخص به صفر همگرا شود را تضمین می‌کند. از اثبات تئوری (۳) می‌توان دریافت که شرط  $\sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty$  نقش مهمی را ایفا می‌کند. به این صورت که هنگامی که نويز های ارتباطی وجود دارد این شرط همگرایی میانگین حالت سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند. از تئوری (۳) می‌توان دریافت که تحت پروتکل (۱۹) خطای استاتیک بین وضعیت نهایی سیستم و میانگین وضعیت اولیه سیستم موجود است و  $\text{var}(x^*)$  بیانگر خطای استاتیک در حالت میانگین مربع است. در حقیقت می‌توان نشان داد که اگر شرایط تئوری (۳) برقرار باشد آنگاه

$$\text{var}(x^*) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq N} E \left[ x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0) \right]^2 \quad (25)$$

یعنی  $\text{var}(x^*)$  ماکزیمم خطای استاتیک میانگین مربع بین وضعیت هر گره و میانگین وضعیت‌های اولیه کل سیستم است.

#### ۳-۳-۲- شبکه‌های با توپولوژی متغیر

شبکه‌های با توپولوژی متغیر با زمان را می‌توان ناشی از عواملی مانند خرابی پیوندهای ارتباطی، از دست دادن بسته‌های داده، تغییر پارامترهای کانال و ... دانست.

در این موارد پروتکل توزیع شده بر روی جریان‌های گراف‌های  $\{\mathcal{G}(t), t = 0, 1, \dots\}$  که

$\mathcal{G}(t) = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}(t), \mathcal{A}_{G(t)}\}$ ,  $t = 0, 1, \dots$  دنباله ای از گراف‌های جهت دار با مجموعه گره‌های مشابه هستند اجرا می‌شود. ما در اینجا یک نوع جریان معمولی توپولوژی گراف را مطابق زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Gamma_1 = \{ \mathcal{H}(t), t = 0, 1, \dots \mid \mathcal{H}(t) \text{ is a balanced digraph,} \quad (26)$$

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{t \geq 0} \|\mathcal{A}_{\mathcal{H}(t)}\| < \infty \}$$

که خانواده ای از تمام دنباله‌های گراف متعادل با ماتریس مجاورتی محدود هستند. بنابراین برای یک شبکه متعادل متغیر محدود  $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(t)} = [a_{ij}(t)]_{N \times N}$  که المان‌های آن تنها دو مقدار به خود می‌گیرند اگر گره  $j$  از گره  $i$  اطلاعات دریافت کند  $a_{ij}(t) > 0$  در غیر این صورت  $a_{ij}(t) = 0$ ,  $(i, j \in \mathcal{V})$ . برای  $\{\mathcal{G}(t), t = 0, 1, \dots\}$  پروتکل توزیع شده شبکه به صورت زیر است:

تبدیل شده که همان پروتکل توزیع شده مبتنی بر measurement است اگر  $\mathbf{u}_i(t)$  فقط به وضعیت عامل  $i$  ام و measurement وضعیت‌های همسایه‌های آن بستگی داشته باشد، یعنی:

$$\mathbf{u}_i(t) \in \sigma\left(\bigcup_{s=0}^t \sigma(\mathbf{x}_i(s), \mathbf{y}_{ji}(s), j \in \mathcal{N}_i)\right), \quad (38)$$

$$\mathbf{u}_i(t), \mathbf{x}_i(s), \mathbf{y}_{ji}(s) \in \mathbb{R}^M \quad \forall t = 0, 1, \dots, i = 1, 2, \dots, N$$

اصطلاح کنترل اجماع میانگین به معنای طراحی یک پروتکل توزیع شده برای شبکه پویا  $(\mathcal{G}, \mathbf{X})$  است، به گونه‌ای که برای هر مقدار اولیه  $\mathbf{X}(0)$ ، وضعیت همه عوامل به بردار  $(1/N) \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(0)$  همگرا می‌شوند بطوریکه  $t \rightarrow \infty$  بتوان  $(1/N) \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(0)$  را در یک مسیر توزیع شده محاسبه کرد. در این حالت  $(1/N) \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(0)$  مقدار تصمیم گروه نامیده می‌شود

$$(1/N) \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(0) = E(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^M \quad (39)$$

**تعریف ۱)** پروتکل توزیع شده  $\mathcal{U}$  یک پروتکل مجانبی اجماع میانگین بدون بایاس نامیده می‌شود اگر سیستم (۱۹)، (۲۰) دارای ویژگی‌های زیر باشد:

برای هر  $\mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}^{N \times M}$  یک بردار متغیر تصادفی  $\mathbf{x}^*$  وجود دارد به طوریکه

$$E(\mathbf{x}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(0), \quad Var(\mathbf{x}^*) < \infty$$

و

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}^*]^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

برای شبکه پویا  $(\mathcal{G}, \mathbf{X})$  ما پروتکل توزیع شده زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{u}_i(t) = a(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\mathbf{y}_{ji}(t) - \mathbf{x}_i(t)), \quad (40)$$

$$t = 0, 1, \dots$$

که  $a(t) > 0$  همان تابع بهره اجماع است.

#### ۴-۱-۱- شبکه‌های با توپولوژی ثابت

با جاگذاری پروتکل (۱۰) در (۸) داریم:

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + a(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{w}_{ji}(t) - \mathbf{x}_i(t)), \quad (41)$$

پس در حالت کلی برای یک شبکه (گراف)  $N$  گره ای که مقادیر هر گره به صورت یک بردار با  $M$  مولفه است داریم:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}(t+1)]_{N \times M} &= [\mathbf{I}_N - a(t)\mathbf{L}_{\mathcal{G}}] \cdot [\mathbf{X}(t)]_{N \times M} \\ &+ a(t) \cdot [\mathbf{D}_{\mathcal{G}}]_{N \times N} \cdot [\mathbf{W}(t)]_{N \times M} \end{aligned} \quad (42)$$

که داریم:

$$\mathbf{D}_{\mathcal{G}} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N), \quad \alpha_i = \text{ith row of } \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$$

و  $\mathbf{W}(t) = \mathbf{w}'(t) \cdot \mathbf{1}_M^T$  که یک ماتریس  $N \times M$  است. بطوریکه

که  $\mathbf{u}_i(t)$  و  $\mathbf{x}_i(t)$  به ترتیب وضعیت جاری و ورودی کنترلی عامل  $i$  ام است. در رابطه بالا  $\mathbf{x}_i(t)$  و  $\mathbf{u}_i(t)$  اسکالر در نظر گرفته شده اند و مقادیر اولیه عامل (گره‌ها) با  $\mathbf{x}_i(0)$  نشان داده می‌شود. عامل  $i$  ام می‌تواند اطلاعات را از همسایه های خود دریافت کند:

$$\mathbf{y}_{ji}(t) = \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{w}_{ji}(t), \quad (31)$$

$$j \in \mathcal{N}_i$$

که  $\mathbf{y}_{ji}(t)$  مقدار اندازه‌گیری شده وضعیت عامل  $j$  ام  $(\mathbf{x}_j(t))$  توسط عامل  $i$  ام است و  $\{w_{ji}(t), i, j = 1, 2, \dots, N\}$  نویزهای ارتباطی می‌باشند.

حال در مدل مطرح شده در روش خود فرض کردیم مقادیر هر یک از عامل‌ها برداری است. این ایده به این معنی است که هر یک از عامل‌های شبکه به عنوان یک حسگر چندین کمیت را به همزمان و به طور موازی دریافت می‌کند. پس داریم:

$$\mathbf{x}_i(t) = [x_{1,i}(t), x_{2,i}(t), \dots, x_{M,i}(t)]^T \quad (32)$$

که  $M$  تعداد مولفه‌های بردار مقادیر گره‌ها است. همچنین با در نظر گرفتن تمام عامل‌ها داریم:

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)]^T \in \mathbb{R}^{N \times M} \quad (33)$$

پس برای رابطه (۱۵) داریم:

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{u}_i(t), \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^M, \quad t = 0, 1, \dots$$

و برای رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{ji}(t) &= \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{w}_{ji}(t), \\ \mathbf{w}_{ji} &\in \mathbb{R}^M, \quad j \in \mathcal{N}_i \end{aligned} \quad (35)$$

می‌توان نویز موجود بر هر کانال را  $\mathbf{w}_{ji}$  به این تعبیر که هر درایه بردار وضعیت، مستقل از دیگر درایه‌ها، مورد تاثیر نویز قرار گیرد به صورت یک بردار با توزیع نرمال در نظر گرفت ولی ما در اینجا حالت ساده آن یعنی اعمال نویز کانال به تمامی درایه‌های سیگنال انتقالی به صورت  $\mathbf{1}_m w_{ji}(t)$  در نظر گرفته ایم. در نتیجه می‌توان گفت گراف  $\mathcal{G}$  ساختار جریان اطلاعات را در سیستم (۱۹) نشان می‌دهد که به آن گراف جریان اطلاعات یا گراف توپولوژی شبکه سیستم (۱۹) می‌گویند و داریم:

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)]^T, \quad \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{N \times M} \quad (36)$$

$(\mathcal{G}, \mathbf{X})$  شبکه پویا است. به همین صورت گروه کنترل‌های  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  به فرم

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (37)$$



برای  $\{\mathcal{G}(t), t = 0, 1, \dots\}$  پروتکل توزیع شده (۲۵) به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\mathbf{u}_i(t) = a(t) \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)(\mathbf{y}_{ji}(t) - \mathbf{x}_i(t)), \quad (47)$$

$$\forall t = 0, 1, \dots$$

$a_{ij}(t)$  همانطور که در بخش قبل قید شد همان سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}(t)}$  است. و  $\mathbf{y}_{ji}(t)$  از رابطه (۲۰) بدست می‌آید. با جاگذاری رابطه (۴۷) در (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t+1) &= \mathbf{x}_i(t) \\ &+ a(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij}(t)(\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{1}_{N_i} w_{ji}(t) - \mathbf{x}_i(t)), \end{aligned} \quad (48)$$

در نتیجه برای یک شبکه  $(\mathcal{G}(t), \mathbf{X})$  داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t+1) &= [\mathbf{I}_N - a(t)\mathbf{L}_{\mathcal{G}(t)}] \mathbf{X}(t) \\ &+ a(t)\mathbf{D}_{\mathcal{G}(t)} \mathbf{W}(t), \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (49)$$

که داریم:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_{\mathcal{G}}]_{N \times N^2} &= \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N), \\ \alpha_i &= i \text{ th row of } \mathcal{A}_{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (50)$$

و  $\mathbf{W}(t) = \mathbf{w}'(t) \cdot \mathbf{1}_m^T$  که یک ماتریس  $N^2 \times m$  است. بطوریکه

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'(t) &= [\mathbf{w}'_1(t), \dots, \mathbf{w}'_N(t)]^T, \\ \mathbf{w}_i(t) &= [w_{1i}(t), \dots, w_{Ni}(t)]^T \end{aligned} \quad (51)$$

اگر یک عدد صحیح  $h > 0$  موجود باشد بطوریکه  $\inf_{m>0} \lambda_{mh}^h > 0$  و مفروضات (A3a) و (A4) نیز برقرار باشد آنگاه برای  $\mathbf{W}$  داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[V(t)] = 0, \quad \forall \mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (50)$$

این یعنی رابطه ی (۴۷) یک پروتکل اجماع ضعیف میانگین مربع است. **تئوری ۶** پروتکل (۲۷) را بر سیستم (۱۹) و (۲۰) برای گراف های متغیر  $\{\mathcal{G}(t), t = 0, 1, \dots\} \in \Gamma_1$  اعمال می‌کنیم اگر عدد صحیح  $h > 0$  وجود داشته باشد بطوریکه  $\inf_{m \geq 0} \lambda_{mh}^h > 0$  و مفروضات (A3a) و (A3) برقرار باشد آنگاه برای  $\mathbf{W}$  داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}_i(t) - \tilde{\mathbf{x}}_*] = \mathbf{0}, \quad (51)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \forall \mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}^{N \times m}$$

که  $\tilde{\mathbf{x}}_*$  یک بردار متغیر تصادفی وابسته به  $\mathbf{W}$  و  $\mathbf{X}(0)$  است.

## ۵- شبیه سازی

ما در این بخش ضمن ذکر چند مثال از شبیه سازی‌های از قبل انجام شده نتایج بدست آمده را با نتایج شبیه‌سازی خود مقایسه می‌کنیم.

**مثال ۱** گراف جهتی سه گره‌ای با سه یال یا لینک ارتباطی مطابق شکل (۴-الف) به عنوان یک شبکه با توپولوژی ثابت در مرجع [۱۴]

$$\mathbf{w}'(t) = [\mathbf{w}'_1(t), \dots, \mathbf{w}'_N(t)]^T, \quad (43)$$

$$\mathbf{w}_i(t) = [w_{1i}(t), \dots, w_{Ni}(t)]^T$$

همانند فصل قبل قبل مفروضات مسئله از قرار زیر است:

(A1): گراف  $\mathcal{G}$  گراف جهتی متعادل است.

(A2): گراف  $\mathcal{G}$  شامل درخت پوشا است.

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty; \quad (A3)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0. \quad (A3a)$$

**تئوری ۴** پروتکل (۲۱) را به سیستم (۱۹)–(۲۰) اعمال می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مفروضات (A1), (A3a), (A2) برقرار است آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[V(t)] = 0, \quad \forall \mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}^{N \times M} \quad (43)$$

آنگاه رابطه ی (۲۱) پروتکل اجماع ضعیف میانگین مربع است. در اینجا  $V(t) = \left\| (\mathbf{I}_N - (1/N)\mathbf{1}\mathbf{1}^T) \mathbf{X}(t) \right\|_F^2$  تابع انرژی خطای اجماع نامیده می‌شود.

**تئوری ۵** پروتکل (۲۱) را به سیستم (۱۹) و (۲۰) اعمال می‌کنیم اگر فرضیات (A1)–(A3) برقرار باشد آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}^*]^2 = 0, \quad (44)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall \mathbf{X}(0) \in \mathbb{R}^{N \times m}$$

که  $\mathbf{x}^*$  یک متغیر تصادفی وابسته به  $\mathbf{W}$  است و  $\mathbf{X}(0)$  رابطه ی زیر را ارضا می‌کند

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}^*) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(0) \\ \text{Var}(\mathbf{x}^*) &\leq \frac{\sigma_W^* |\mathcal{E}_{\mathcal{G}}| \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij}^2}{N^2} \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t). \end{aligned} \quad (45)$$

$$\sigma_W^* = \max_{(j,i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \sup_{t \geq 0} E[w_{ji}(t)]^2,$$

یعنی (۴۰) یک پروتکل اجماع میانگین مربع بدون بایاس مجانبی است.

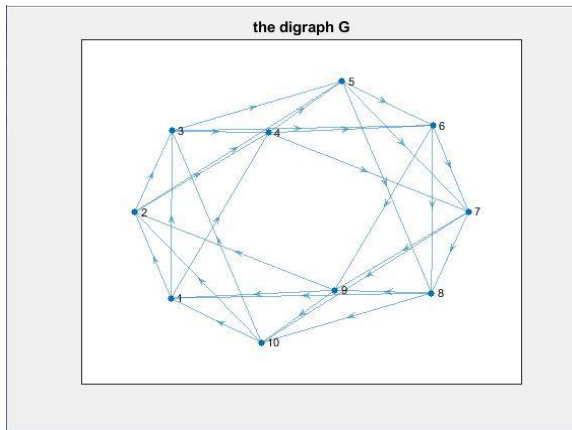
## ۴-۱-۲- شبکه‌های با توپولوژی متغیر

مشابه با مورد توپولوژی ثابت در شبکه‌های با توپولوژی متغیر نیز می‌توان با در نظر گرفتن سیگنال‌های برداری شده پروتکل توزیع شده بر روی جریانی از گراف های  $\{\mathcal{G}(t), t = 0, 1, \dots\}$  که  $\mathcal{G}(t) = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}(t), \mathcal{A}_{\mathcal{G}(t)}\}$ , دنباله ای از گراف های جهت دار با مجموعه گره‌های مشابه هستند را بدست آورد. بنابراین داریم:

$$\mathbf{x}_i(t) = [x_{1,i}(t), x_{2,i}(t), \dots, x_{M,i}(t)]^T \quad (46)$$

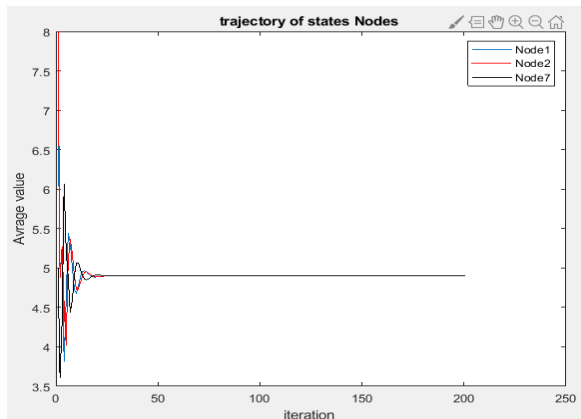
$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)]^T, \quad \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{n \times M}$$

**مثال ۲)** در این مثال الگوریتم اجماع ذکر شده در بخش قبل را برای شبکه ای با توپولوژی ثابت که دارای گراف جهت داری با ۱۰ گره و ۳۰ یال است (شکل ۶) با تکرار ۲۰۰ شبیه سازی نمودیم. بردار مقادیر اولیه را  $\mathbf{x}(0) = [7, 8, 3, 1, 4, 6, 5, 7, 2, 6]$  و نویز لینکها را مشابه مثال بالا  $i.i.d$  و گوسی با واریانس  $\sigma^2 = 0.01$  در نظر می گیریم.



شکل ۶- گراف جهت دار  $n = 10$  و تعداد یال ۳۰

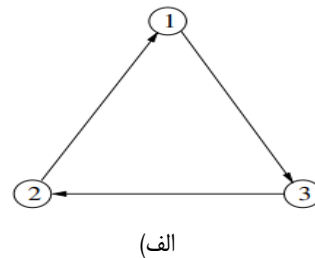
شکل (۷) اجماع عاملهای منتخب به میانگین مقادیر اولیه  $a(t) = \log(t+2)/t + 2$  را با بهره الگوریتم  $(\mu = 4.9000)$  نشان می دهد. همچنین خطای اجماع<sup>۱</sup> برای مثال بالا به صورت شکل (۸) است



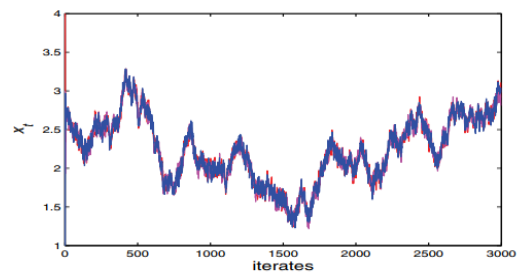
شکل ۷- اجماع در گرهها با بهره الگوریتم

$$a(t) = \log(t+2)/t + 2$$

نشان داده شده است. بردار مقادیر اولیه گرهها برابر با  $\mathbf{x}(0) = [4, 3, 1]$  است. نویز اندازه گیری گوسی با مقدار واریانس  $\sigma^2 = 0.01$  در نظر گرفته شده است. شکل (۴-ب) نتایج شبیه سازی را برای هر عامل (گره) بدون در نظر گرفتن بهره پروتکل اجماع (step-size) نشان می دهد همانطور که دیده می شود اجماع در این حالت برقرار نیست.

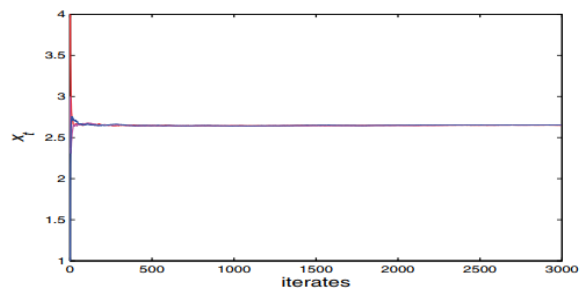


(الف)



(ب)

شکل ۴- الف) گراف با سه گره ب) عدم اجماع در گرهها بار دیگر مثال بالا را با در نظر گرفتن بهره الگوریتم  $a(t) = (t+5)^{-0.85}, t \geq 0$  با تکرار ۳۰۰۰ انجام شده است. همانطور که در شکل (۵) نشان داده شده است تمامی عاملها در مقدار میانگین مقادیر اولیه گرهها به اجماع دست یافته اند.



شکل ۵- اجماع عاملها با در نظر گرفتن بهره الگوریتم

$$a(t) = (t+5)^{-0.85}$$

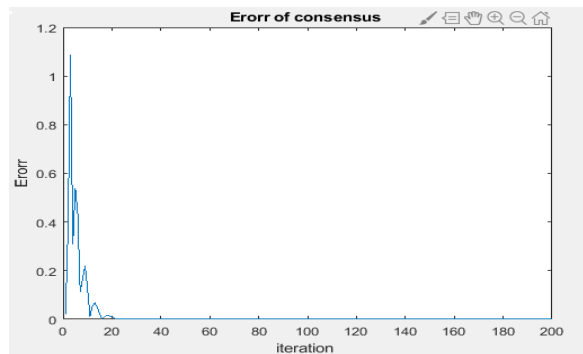
<sup>۱</sup>- consensus error

مورد یک مقدار مشخص مورد علاقه است که به وضعیت همه عوامل بستگی دارد. الگوریتم اجماع (پروتکل) یک ضابطه درون شبکه ای است که تبادل اطلاعات بین یک عامل و همه همسایه‌های آن را در شبکه مشخص می‌کند. در شبکه‌های واقعی، انواع مختلفی از عوامل نامشخص مانند نویز کانال، محو شدگی (fading) کانال و خرابی‌های تصادفی لینک‌ها وجود دارد. در این تحقیق سعی شده است ابتدا مفهوم اجماع در شبکه‌های توزیع شده، اثرات عوامل نامشخص (نویز، محو شدگی و ...) بر الگوریتم‌های اجماع را بیان نماییم. در ادامه ضمن بیان مقدمه‌ای از تئوری گراف که پایه و اساس توصیف و نمایش شبکه‌های مبتنی بر گراف است انواع ماتریس‌های شبکه و روابط حاکم بر آنها را معرفی نمودیم. در بخش سوم ما کنترل اجماع میانگین برای شبکه‌های زمان گسسته ی با عامل‌های درجه یک و با توپولوژی‌های ثابت و متغیر با زمان را برای گراف‌های جهت دار بررسی نمودیم. در این بخش اطلاعات قابل دسترس برای هر عامل به جهت طراحی ورودی کنترلی از ادغام وضعیت محلی هر عامل با وضعیت عامل‌های همسایه که توسط نویز ارتباطی تصادفی تحت تاثیر قرار گرفته بدست آمده است و فرضیات و شرایط لازم برای رسیدن به اجماع در شبکه‌های متعادل در حالت زمان گسسته برای هر دو توپولوژی ثابت و متغیر با زمان تشریح گردید. سپس قضایا و تئوری‌های مربوط به رسیدن به اجماع و نرخ همگرایی در این شبکه‌ها بیان و اثبات شده است. در این بخش چهارم با فرض وجود چندین سیگنال همزمان به عنوان مقادیر اولیه اندازه‌گیری شده توسط یک گره سیگنال‌های برداری تعریف و تمامی تعاریف، روابط و قضایای بخش قبل برای هر دو توپولوژی مذکور به فرم ماتریسی بیان گردید.

در پایان در بخش پنجم ضمن ابراد چندین مثال متفاوت شبیه‌سازی-های لازم برای هر دو توپولوژی ثابت و متغیر انجام گرفته و نتایج حاصل و مقایسه بین آنها به تصویر کشیده شده است.

## ۷- منابع

- [1] F. Paganini, J. Doyle, and S. Low, Scalable laws for stable network, Orlando: Int. Conf. Decision and Control, 2001.
- [2] A. F. a. R. M. Murray, Information flow and cooperative control, IEEE Trans. Automat. Contr, 2004, p. 1465–1476.
- [3] J. C. a. F. Bullo, Coordination and geometric optimization via, SIAM J. Control Optim, May 2003.
- [4] Ruohonen, Keijo, GRAPH THEORY, 2013.
- [5] Knauer, Ulrich, Algebraic Graph Theory, 2011.
- [6] Tao Li, Jiexiang Wang, Distributed Averaging With Random Network Graphs and Noises, vol. 64, IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, 2018.

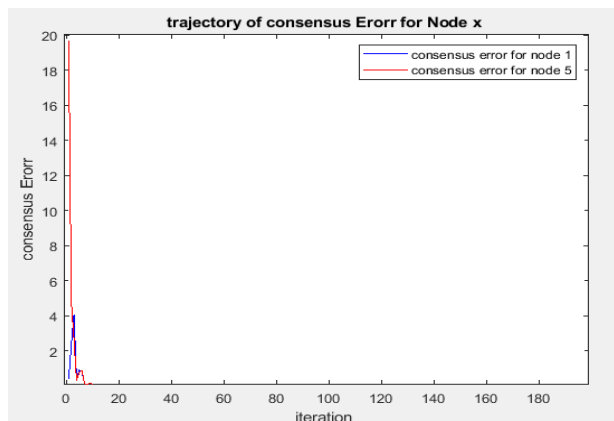


شکل ۸- خطای اجماع برای شبکه با ۱۰ گره

در مرحله بعد مثال بالا را برای همان شبکه اما با مقادیر اولیه برداری شبیه‌سازی کرده ایم. یعنی مقادیری که در لحظه صفر توسط گره‌ها اندازه‌گیری می‌شود برداری با سه مولفه است لذا ماتریس مقادیر اولیه به صورت زیر است

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 & 9 & 9 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 3 & 7 & 6 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 5 & 8 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}^T \quad (52)$$

پس ردیف  $i$ ام این ماتریس مقادیر گره  $i$ ام است. انتظار داریم مقادیر گره‌ها بعد از ۲۰۰ تکرار الگوریتم به بردار میانگین مقادیر اولیه یعنی  $\mu = [4.7, 4.7, 4.7]$  همگرا شوند لذا برای نشان دادن این امر نمودار خطای اجماع آن به صورت شکل (۹) خواهد بود:



شکل ۹- خطای اجماع برای شبکه با ۱۰ گره و مقادیر برداری

## ۶- نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر شبکه‌های توزیع شده چند عامله محققان زیادی را به خود جلب نموده است. این امر به دلیل کاربردهای گسترده سیستم‌های چند عامله در بسیاری از حوزه‌ها مانند پروازهای گروهی پهپادها که نیاز به همکاری و عملیات گروهی عامل‌ها دارد بوده است. شبکه‌های توزیع شده مبتنی بر اجماع سیستم‌هایی هستند که به منظور رسیدن به یک مقدار مشترک، از محاسبات و ارتباطات محلی مابین گره‌های شبکه بهره می‌گیرند. در این شبکه‌ها، اجماع به معنای دستیابی به توافق در

- [13] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, p. 1520–1533, 2004.
- [14] M. Huang and J. H. Manton, "Coordination and consensus of networked agents with noisy measurement: Stochastic algorithms and asymptotic behavior," *SIAM J. Control Optim*, vol. 48, no. 1, p. 134–161, 2009.
- [15] T. Li, "Asymptotically unbiased average consensus under measurement noises and fixed topologies," *17th IFAC World Congress Seoul, Korea*, p. jul. 2867–2873, 2008.
- [16] T. Li and J. F. Zhang, "Mean square average consensus under measurement noises and fixed topologies: Necessary and sufficient conditions," *Automatica*, vol. 45, no. 8, p. 1929–1936, 2009.
- [17] R. O.-S. a. R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, p. 1520–1533, 2004.
- [7] Y. Alavi, G. Chartr, O. R. Oellermann, *The Laplacian spectrum of graphs*, Wiley, 1991.
- [8] Reza Olfati-Saber, Richard M. Murray, *Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays*, vol. 49, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, 2004.
- [9] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, 2004.
- [10] R. O. Saber and R. M. Murray, "Consensus protocols for networks of dynamic agents," *Am. Control Conf*, p. 951–956, 2003.
- [11] Reza Olfati-Saber, Alex Fax, and Richard M. Murray, "Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 213-233, 2007.
- [12] M. Fiedler, "Algebraic connectivity of graphs," *Czechoslovak Math. J.*, vol. 23, no. 98, p. 298–305, 1973.