

تحلیل مقایسه‌ای عملکرد کدهای RS، BCH و LDPC در سیستم‌های انتقال نوری تک‌حالت در حضور نویز تداخل غیرخطی (NLI)

حمیدرضا کاکائی^۱، محمدجواد ناطقی^{۲*}

۱. دانشیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران.

۲. دانشجوی دکتری، گروه مهندسی برق، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران.

چکیده

این مقاله به تحلیل عملکرد و مقایسه جامع ۹ طرح کدگذاری تصحیح خطای پیشرو استاندارد در یک کانال فیبر نوری تک‌حالت دوربرد می‌پردازد که در آن اثرات غیرخطی به عنوان عامل اصلی محدودکننده عملکرد در نظر گرفته شده‌اند. با بهره‌گیری از یک چارچوب شبیه‌سازی یکپارچه و قدرتمند که در پایتون توسعه یافته، عملکرد هر کد تحت تأثیر تفکیک شده پدیده‌های غیرخطی کلیدی یعنی مدولاسیون خودفاز، مدولاسیون فاز متقابل و ترکیب چهارموج و همچنین نویز گسیل خودبه‌خودی تقویت شده ارزیابی می‌شود. نتایج در قالب نمودارهای نرخ خطای بیت در برابر نسبت انرژی بیت به نویز ارائه شده و "جریمه عملکرد" ناشی از هر یک از اثرات غیرخطی به صورت کمی محاسبه می‌گردد. تحلیل مقایسه‌ای نشان می‌دهد که کدهای با تصمیم‌گیری نرم مانند LDPC، با دستیابی به BER هدف (10^{-5}) در کمترین مقدار E_b/N_0 عملکردی به مراتب برتر از طرح‌های با تصمیم‌گیری سخت دارند. این پژوهش با ارائه داده‌های دقیق و مقایسه‌ای و بحث در مورد مصالحه بین عملکرد و پیچیدگی پیاده‌سازی، یک راهنمای عملی برای انتخاب بهینه‌ترین ساختار FEC در طراحی سیستم‌های انتقال نوری پرسرعت فراهم کرده و زیربنای لازم برای تحقیقات آتی را پایه‌ریزی می‌کند.

واژه‌های کلیدی: فیبرنوری، اثرات غیرخطی، کد تصحیح خطای پیشرو، مدولاسیون خودفاز، مدولاسیون فاز متقاطع، ترکیب چهارموجی

Comparative Performance Analysis of RS, BCH, and LDPC Codes in Single-Mode Optical Transmission Systems in the Presence of Nonlinear Interference (NLI)

Hamidreza Kakaei¹, Mohammad Javad Nateghi^{2*}

1,2. Imam Hossein Comprehensive University, Department of Electrical Engineering, Tehran, Iran.

Abstract

This paper presents a comprehensive performance analysis and comparison of nine standard Forward Error Correction (FEC) schemes over a long-haul, single-mode optical fiber channel, where nonlinear effects are considered the primary performance-limiting factor. Utilizing a unified and powerful simulation framework developed in Python, the performance of each code is evaluated under the distinct impact of key nonlinear phenomena—namely Self-Phase Modulation (SPM), Cross-Phase Modulation (XPM), and Four-Wave Mixing (FWM)—in addition to Amplified Spontaneous Emission (ASE) noise. The results are presented as Bit Error Rate (BER) versus Bit Energy-to-Noise Ratio (E_b/N_0) curves, and the "performance penalty" incurred by each nonlinear effect is quantitatively calculated. The comparative analysis reveals that soft-decision codes, such as Low-Density Parity-Check (LDPC) codes, significantly outperform hard-decision schemes by achieving the target BER of 10^{-5} at the lowest E_b/N_0 . By providing detailed, comparative data and discussing the trade-off between performance and implementation complexity, this research offers a practical guide for selecting the optimal FEC structure in the design of high-speed optical transmission systems and establishes the necessary groundwork for future research.

Key words: Waveguide Transmission Line Method, Permittivity, Permeability, Conductive polymer.

راهنمایی عملی برای انتخاب بهترین استرلژی FEC در سیستم‌های نوری نسل آینده عمل کند. ساختار ادامه مقاله به شرح زیر است: بخش ۲ به مرور ادبیات و تکامل کدهای FEC می‌پردازد. بخش ۳ به طور کامل مدل کانال، پارامترهای شبیه‌سازی و روش اجرای آن را تشریح می‌کند. بخش ۴ نتایج شبیه‌سازی را به صورت انفرادی و مقایسه‌ای تحلیل کرده و به بحث در مورد مصالحه بین عملکرد و پیچیدگی می‌پردازد. بخش ۵ محدودیت‌های این پژوهش و پیشنهاداتی برای کارهای آتی را بیان می‌کند و در نهایت، بخش ۶ به نتیجه‌گیری نهایی اختصاص دارد.

۲- مروری بر ادبیات تحقیق و کارهای پیشین

برای درک کامل اهمیت و نوآوری این پژوهش، لازم است تا سه حوزه کلیدی در ادبیات فنی مرور شوند: (۱) ضرورت و تکامل کدهای تصحیح خطای پیشرو در استانداردهای نوری، (۲) چالش‌های ناشی از اثرات غیرخطی در فیبر و (۳) شکاف موجود در تحلیل عملکرد جامع کدها تحت این شرایط واقع‌گرایانه.

۲-۱- ضرورت و تکامل طرح‌های FEC در مخابرات نوری

با افزایش تقاضا برای پهنای باند، سیستم‌های انتقال نوری به سمت نرخ‌های بیت بالاتر (100G, 400G و فراتر) و فواصل انتقال طولانی‌تر حرکت کرده‌اند. این پیشرفت مستلزم بهبود قابل توجهی در نسبت سیگنال به نویز نوری ($OSNR^9$) مورد نیاز در گیرنده است [۵]. کدهای تصحیح خطای پیشرو به عنوان یک تکنولوژی بنیادین برای غلبه بر این چالش ظهور کرده‌اند. FEC با افزودن بیت‌های افزونگی به سیگنال اصلی، به گیرنده اجازه می‌دهد تا خطاهای ناشی از نویز و اعوجاج کانال را شناسایی و تصحیح کند. این قابلیت به صورت "بهره کدگذاری" کمی‌سازی می‌شود که به معنای کاهش مورد نیاز $OSNR$ برای دستیابی به یک نرخ خطای بیت مشخص است [۶]. تکامل طرح‌های FEC در استانداردهای مخابرات نوری را می‌توان به سه نسل اصلی تقسیم کرد:

نسل اول: این نسل با کدهای بلوکی با تصمیم‌گیری سخت (Hard-Decision FEC) مانند کد استاندارد Reed-Solomon (RS(255,239)) در توصیه ITU-T G.709 شناخته می‌شود. این کدها بهره کدگذاری متوسطی (حدود ۶ dB) ارائه می‌دهند اما در مقابله با نویزهای شدید و خطاهای تصادفی محدودیت دارند [۷].

نسل دوم: برای دستیابی به بهره کدگذاری بالاتر، کدهای الحاقی (Concatenated Codes) معرفی شدند. در این ساختارها، یک کد خارجی (معمولاً RS^{11}) با یک کد داخلی (مانند کدهای

رشد انفجاری ترافیک داده جهانی، که توسط کاربردهای نظیر ریلانش ابری، ویدئوی با کیفیت بالا و اینترنت اشیا (IoT^1) هدایت می‌شود، شبکه‌های فیبر نوری را به عنوان ستون فقرات زیرساخت‌های مخابراتی مدرن تثبیت کرده است [۱]. برای پاسخگویی به این تقاضای فزاینده، سیستم‌های انتقال نوری به سمت نرخ‌های بیت بالاتر (۱۰۰ گیگابیت بر ثانیه و فراتر) و فواصل انتقال طولانی‌تر حرکت کرده‌اند [۲]. با این حال، این پیشرفت‌ها چالش‌های فیزیکی جدیدی را به همراه داشته‌اند. در این رژیم‌های کاری با توان نوری بالا، فرض خطی بودن کانال دیگر معتبر نیست و اثرات غیرخطی فیبر نوری به عامل اصلی محدودکننده عملکرد سیستم تبدیل می‌شوند. پدیده‌هایی نظیر مدولاسیون خودفاز (SPM^2)، مدولاسیون فاز متقابل (XPM^3) و ترکیب چهارموج (FWM^4)، اعوجاجات پیچیده و وابسته به سیگنال را به وجود می‌آورند که منجر به افزایش چشمگیر نرخ خطای بیت (BER^5) می‌گردند [۳]. برای تضمین انتقال قابل اعتماد داده، استفاده از کدهای قدرتمند تصحیح خطای پیشرو (FEC^6) امری ضروری است. استانداردهای صنعتی مانند ITU-T G.709 و G.975.1، استفاده از طرح‌های پیشرفته FEC را برای افزایش حاشیه نویز سیستم و دستیابی به عملکرد مطلوب، الزامی می‌دانند [۴]. با وجود نقش حیاتی FEC، بخش قابل توجهی از ادبیات تحقیق، عملکرد این کدها را تحت فرض ساده‌انگارانه یک کانال با نویز گوسی سفید افزایشی ($AWGN^7$) ارزیابی می‌کند. این مدل قادر به شبیه‌سازی دقیق ماهیت پیچیده تداخل غیرخطی (NLI^8) که دارای همبستگی زمانی و توزیع غیرگوسی است، نمی‌باشد. علاوه بر این، یک تحلیل مقایسه‌ای جامع و سیستماتیک که نسل‌های مختلف کدهای FEC (از کدهای کلاسیک Reed-Solomon تا کدهای مدرن LDPC) را تحت شرایط غیرخطی یکسان و در یک چارچوب شبیه‌سازی واحد ارزیابی کند، در ادبیات پژوهشی کمتر به چشم می‌خورد.

این مقاله با هدف پر کردن این شکاف تحقیقاتی، یک شبیه‌سازی جامع و تحلیل عملکرد مقایسه‌ای از ۹ طرح کلیدی FEC معرفی شده در استانداردهای ITU-T را ارائه می‌دهد. نوآوری اصلی این کار، توسعه یک پلتفرم شبیه‌سازی یکپارچه است که نه تنها نویز تجمعی NLI را مدل می‌کند، بلکه امکان تحلیل تفکیک‌شده تأثیر هر یک از اثرات غیرخطی را نیز فراهم می‌آورد. هدف در این پژوهش، تعیین کمی "جریمه عملکرد" تحمیل‌شده توسط NLI بر روی هر کد و ارائه یک رتبه‌بندی شفاف و مبتنی بر شواهد است تا به عنوان

⁷ Additive White Gaussian Noise

⁸ Nonlinear Interference

⁹ Optical Signal-to-Noise Ratio

¹⁰ Coding Gain

¹¹ Reed-Solomon

¹ Internet of Things

² Self-Phase Modulation

³ Cross-Phase Modulation

⁴ Four-Wave Mixing

⁵ Bit Error Rate

⁶ Forward Error Correction

کانولوشنال یا BCH^1 ترکیب می‌شود. کدهای حاصل‌ضربی (Product Codes) مبتنی بر BCH که در این پژوهش نیز بررسی شده‌اند، نمونه‌های برجسته‌ای از این نسل هستند که با کدگذاری تکراری به بهره‌رسانی بالاتری دست می‌یابند [۸].

نسل سوم و فراتر: با ظهور گیرنده‌های همدوس (Coherent)، استفاده از تصمیم‌گیری نرم (Soft-Decision) ممکن شد. این کدها به جای تصمیم قطعی صفر یا یک، از اطلاعات احتمالی (مقادیر LLR^2) خروجی کانال استفاده می‌کنند که به طور چشمگیری عملکرد را بهبود می‌بخشد. کدهای بررسی توازن کم‌چگالی و کدهای توربو، ستون‌های اصلی این نسل هستند که بهره‌رسانی خالص (NCG^3) آن‌ها به بیش از 11dB می‌رسد و سیستم‌ها را به مرز شانون نزدیک‌تر می‌کنند [۹]. استاندارد ITU-T G.975.1 به تفصیل چندین طرح FEC پیشرفته از این نسل را معرفی کرده است که در شبیه‌سازی این پژوهش نیز گنجانده شده‌اند.

۲-۲- چالش نویز و اثرات غیرخطی در فیبر نوری

عملکرد هر طرح FEC به شدت به مشخصات آماری نویز کانال وابسته است. در مدل‌های کلاسیک، نویز کانال نوری عمدتاً به عنوان نویز گسیل خودبهدودی تقویت‌شده (ASE^4) ناشی از تقویت‌کننده‌های نوری ($EDFA^5$) در نظر گرفته می‌شود که به خوبی با مدل نویز گوسی سفید افزایشی تقریب زده می‌شود. با این حال، در سیستم‌های پرسرعت با توان نوری بالا و کانال‌های مترکم با تسهیم تقسیم طول موج (WDM^6)، این مدل دیگر کافی نیست [۱۰]. در این رژیم‌ها، فیبر نوری از یک محیط انتقال خطی به یک کانال غیرخطی تبدیل می‌شود و نویز تداخل به یک عامل مخرب غلب تبدیل می‌گردد. مهم‌ترین این اثرات عبارتند از:

مدولاسیون خودفاز: که در آن شدت لحظه‌ای خود پالس نوری، ضریب شکست فیبر را تغییر داده و منجر به تغییر فاز و پهن‌شدگی طیفی آن می‌شود [۱۱].

مدولاسیون فاز متقابل: پدیده‌ای مشابه SPM است، اما در آن شدت پالس‌های نوری در کانال‌های مجاور، فاز پالس در کانال مورد نظر را تغییر می‌دهد. این اثر در سیستم‌های WDM بسیار مخرب است [۱۲].

ترکیب چهارموج: که در آن دو یا چند موج نوری با یکدیگر ترکیب شده و موج‌های جدیدی در فرکانس‌های دیگر (که ممکن است با کانال‌های دیگر تداخل کنند) تولید می‌کنند [۱۳].

این اثرات غیرخطی، نویزی تولید می‌کنند که برخلاف نویز ASE، دیگر ماهیت گوسی و سفید ندارد و دارای همبستگی‌های زمانی و آماری پیچیده‌ای است. این موضوع، تحلیل و پیش‌بینی عملکرد FEC را بسیار چالش‌برانگیز می‌کند.

۲-۳- شکاف تحقیقاتی و سهم این مقاله

با مرور کارهای پیشین، دو شکاف اصلی در ادبیات تحقیق شناسایی شد:

فقدان تحلیل مقایسه‌ای جامع: اکثر مطالعات، عملکرد یک یا نهایتاً دو طرح FEC را به صورت مجزا و اغلب تحت کانال ساده AWGN تحلیل کرده‌اند. یک ارزیابی مقایسه‌ای سیستماتیک که طیف وسیعی از کدهای استاندارد (از نسل‌های مختلف) را در یک چارچوب شبیه‌سازی واحد و عادلانه در برابر یکدیگر قرار دهد، کمتر یافت می‌شود. نادیده‌گرفتن یا ساده‌سازی بیش از حد اثرات غیرخطی: بسیاری از تحلیل‌ها یا اثرات غیرخطی را به کلی نادیده می‌گیرند یا آن‌ها را به صورت یک منبع نویز تجمعی با مدل ساده AWGN تقریب می‌زنند. این رویکرد، این واقعیت مهم را نادیده می‌گیرد که ساختارهای مختلف FEC (مانند بلوکی، حاصل‌ضربی یا LDPC) ممکن است به انواع مختلف نویز غیرخطی (SPM, XPM, FWM) حساسیت‌های متفاوتی نشان دهند.

این مقاله با هدف پر کردن این شکاف‌ها تدوین شده است. نوآوری اصلی در این کار ارائه یک تحلیل عملکرد مقایسه‌ای و تفکیک‌شده است. در اینجا با شبیه‌سازی ۹ طرح کلیدی FEC و مدل‌سازی تأثیر مجزای هر یک از پدیده‌های غیرخطی، یک دید عمیق و کمی از میزان آسیب‌پذیری هر کد ارائه می‌شود. نتایج این پژوهش، یک معیار ارزشمند و عملی برای طراحان سیستم‌های نوری جهت انتخاب بهینه‌ترین ساختار FEC بر اساس شرایط کانال و نیازمندی‌های عملکردی فراهم می‌کند.

۳- مدل‌سازی کانال و روش شبیه‌سازی

در این بخش، چارچوب شبیه‌سازی، مدل کانال فیبر نوری، طرح‌های کدگذاری مورد بررسی و متدولوژی ارزیابی عملکرد به تفصیل تشریح می‌شود. این چارچوب با هدف ایجاد یک محیط آزمایشی واقع‌گرایانه، قابل تکرار و ماژولار در زبان پایتون توسعه یافته است [۱۴].

۳-۱- چارچوب کلی شبیه‌سازی

فرآیند شبیه‌سازی بر اساس یک ساختار ماژولار طراحی شده است که شامل سه جزء اصلی است: (۱) کلاس‌های FEC که هر کدام منطق کدگذاری و کدگشایی خود را دارند، (۲) مدل کانال فیبر نوری که نویزهای خطی و غیرخطی را تولید می‌کند، و (۳) یک موتور شبیه‌سازی که این دو جزء را برای اجرای شبیه‌سازی‌های مونت-کارلو به کار می‌گیرد. روندنمای کلی این فرآیند در شکل ۱ نشان داده شده است.

⁴ Amplified Spontaneous Emission

⁵ Erbium-Doped Fiber Amplifier

⁶ Wavelength Division Multiplexing

¹ Bose-Chaudhuri-Hocquenghem

² Log-Likelihood Ratio

³ Net Coding Gain

در تمام شبیه‌سازی‌ها از مدولاسیون BPSK استفاده شده است. این انتخاب به صورت عامدانه صورت گرفت تا بتوان بهره‌کدگذاری ذاتی هر طرح را بدون تأثیر متغیرهای اضافی ناشی از حساسیت مدولاسیون‌های مرتبه بالاتر به نویز فاز، ایزوله و مقایسه کرد. ارزیابی عملکرد کدها در حضور مدولاسیون‌های رایج مانند QPSK و -16 عملکرد QAM، به عنوان گام‌های بعدی در بخش کارهای آتی پیشنهاد شده است.

۳-۳- مدل‌سازی نویز و تداخل غیرخطی

توان کل نویز در گیرنده به عنوان مجموع توان نویز خطی گسیل خودبه‌خودی تقویت‌شده و توان نویز تداخل غیرخطی مدل می‌شود. یکی از نوآوری‌های کلیدی این چارچوب شبیه‌سازی، قابلیت تحلیل تفکیک‌شده و مجزای هر یک از منابع نویز است.

نویز گسیل خودبه‌خودی تقویت‌شده:

این نویز به عنوان منبع اصلی نویز خطی در سیستم‌های نوری تقویت‌شده در نظر گرفته می‌شود. توان کل نویز ASE در پهنای باند کانال بر اساس پارامترهای فیزیکی سیستم عمل می‌کند، محاسبه می‌گردد. این توان به صورت یک نویز گوسی سفید افزایشی به سیگنال اضافه می‌شود [۱۵].

نویز تداخل غیرخطی:

با استفاده از مدل‌های تحلیلی استاندارد پیاده‌سازی شده توان ناشی از اثرات غیرخطی غالب محاسبه می‌شود. این مدل قادر است توان ناشی از هر یک از پدیده‌های مدولاسیون خودفاز، مدولاسیون فاز متقابل و ترکیب چهارموج را به صورت مجزا تخمین بزند. این قابلیت تفکیک، اجازه می‌دهد تا شبیه‌سازی در پنج سناریوی نویز متمایز زیر انجام شود. این کار به منظور ارزیابی دقیق حساسیت هر ساختار کد به هر پدیده غیرخطی به طور مستقل، طراحی شده است:

AWGN/GVD: حالت پایه (کلنال خطی)؛ در این سناریو، تنها نویز ASE و اثرات خطی پاشندگی در نظر گرفته می‌شود. این حالت به عنوان مرجع برای سنجش عملکرد در یک کلنال ایده‌آل عمل می‌کند.

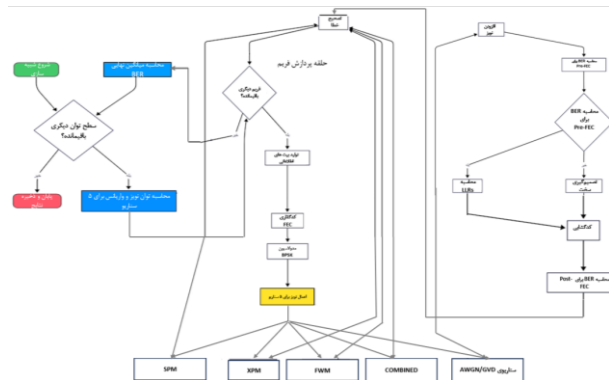
SPM: نویز ASE به همراه نویز ناشی از SPM.

XPM: نویز ASE به همراه نویز ناشی از XPM.

FWM: نویز ASE به همراه نویز ناشی از FWM.

COMBINED ALL EFFECT: حالت واقع‌گرایانه؛ شامل نویز ASE و اثر ترکیبی تمام مولفه‌های غیرخطی (SPM + XPM + FWM). این سناریو نزدیک‌ترین تقریب به شرایط عملیاتی یک سیستم DWDM متراکم است.

برای هر سناریو، توان کل نویز محاسبه شده و واریانس (σ^2) متناظر برای تولید نویز گوسی در موتور شبیه‌سازی به کار می‌رود.



شکل ۱- روندنمای کلی فرآیند شبیه‌سازی برای هر نقطه توان ورودی.

۳-۲- مدل کانال فیبر نوری و پارامترهای شبیه‌سازی

کانال شبیه‌سازی شده، یک لینک انتقال نوری تک‌حالتی و دوربرد متراکم با تسهیم تقسیم طول موج ($DWDM^1$) را مدل می‌کند. مشخصات این لینک مطابق با سیستم‌های عملیاتی رایج انتخاب شده و پارامترهای کلیدی آن در جدول ۱ خلاصه شده است. این پارامترها در تمام شبیه‌سازی‌ها برای تمام کدها ثابت نگه داشته شده‌اند تا یک مقایسه عادلانه تضمین شود.

جدول ۱- پارامترهای کلیدی شبیه‌سازی کانال فیبر نوری

پارامتر	مقدار	واحد	توضیحات
مشخصات لینک			
طول هر دهنه (Span Length)	۸۰	km	
تعداد دهنه‌ها (Number of Spans)	۲۰	-	طول کل لینک: ۱۶۰۰ کیلومتر
مشخصات فیبر نوری			
ضریب تضعیف (α)	۰.۲	dB/km	در طول موج مرکزی
ضریب پاشندگی رنگی (D)	۱۶.۷	ps/(nm.km)	
ضریب غیرخطی (γ)	۱.۳	(W.km) ^{-۱}	
طول موج مرکزی (λ)	۱۵۵۰	nm	
مشخصات سیستم			
شاخص نویز تقویت‌کننده (NF)	۵.۰	dB	برای هر EDFA در انتهای هر دهنه
تعداد کانال‌های WDM (Nch)	۸۰	-	برای محاسبه دقیق FWM و XPM
پهنای باند هر کانال (Bch)	۵۰	GHz	
توان ورودی هر کانال (Pch)	۱	dBm	توان ثابت برای محاسبه NLI
مدولاسیون	BPSK	-	برای ایزوله کردن بهره‌کدگذاری FEC

¹ Dense Wavelength Division Multiplexing

۴-۳- متدولوژی شبیه‌سازی

فرآیند شبیه‌سازی برای هر طرح FEC به صورت مرحله به مرحله اجرا می‌شود تا منحنی‌های نرخ خطای بیت (BER) در برابر نسبت انرژی بیت به چگالی طیفی نویز (E_b/N_0) استخراج گردد. این فرآیند بر اساس روش مونت-کارلو عمل می‌کند تا به نتایجی با دقت آماری بالا دست یابد. برای هر یک از ۹ طرح کدگذاری، یک حلقه بر روی سطوح مختلف توان ورودی سیگنال اجرا می‌شود. در هر سطح توان، مقادیر E_b/N_0 برای هر یک از پنج سناریوی نویز (که در بخش ۳-۳ تعریف شدند) محاسبه می‌گردد. سپس برای هر سناریو، فرآیند زیر برای تعداد زیادی فریم تکرار می‌شود تا معیار توقف (مانند جمع‌آوری حداقل ۱۰۰ خطا) برآورده شود. ابتدا، یک دنباله بیت اطلاعاتی تصادفی تولید و به بیت‌های کدگذاری شده تبدیل می‌شود. سپس، بیت‌های کدگذاری شده به سیگنال BPSK (مقادیر ۱.۰ و -۱.۰) نگاشت شده و نویز گوسی با واریانس (σ^2) متناسب با سناریوی نویز فعلی به آن اضافه می‌گردد تا سیگنال دریافتی را شبیه‌سازی کند. سیگنال نویزی دریافتی برای فرآیند کدگشایی آماده می‌شود؛ برای کدهای با تصمیم‌گیری سخت، سیگنال به بیت‌های ۰ و ۱ کوآنتیزه می‌شود، در حالی که برای کدهای با تصمیم‌گیری نرم (مانند LDPC)، از مقادیر آنالوگ سیگنال برای محاسبه نسبت درست‌نمایی لگاریتمی هر بیت استفاده می‌شود. در ادامه، بیت‌های اطلاعاتی با استفاده از کدگشایی مربوط به هر طرح، بازیابی می‌شوند. در هر فریم، دو نوع خطا محاسبه می‌گردد: Pre-FEC BER، که با مقایسه بیت‌های کدگذاری شده ارسالی و بیت‌های سخت دریافتی (قبل از دیکدر) نرخ خطای بیت کنال خام را مشخص می‌کند، و Post-FEC BER، که با مقایسه بیت‌های اطلاعاتی اصلی و بیت‌های بازیابی شده پس از کدگشایی، نرخ خطای بیت نهایی سیستم را به دست می‌دهد. پس از اتمام تمام فریم‌ها برای یک نقطه E_b/N_0 ، میانگین مقادیر Pre-FEC BER و Post-FEC BER محاسبه و به همراه مقدار E_b/N_0 متناظر ذخیره می‌گردد. این فرآیند برای تمام سطوح توان تکرار می‌شود تا منحنی‌های عملکرد کامل شوند.

۴- طرح‌های کدگذاری تصحیح خطا

در این پژوهش، عملکرد ۹ طرح کدگذاری تصحیح خطا (FEC) که به دقت از استانداردهای ITU-T انتخاب شده‌اند، مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفت. این مجموعه کدها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که طیف وسیعی از ساختارها (بلوکی، الحاقی، حاصل‌ضربی)، نسل‌های فناوری، و فلسفه‌های کدگشایی (تصمیم‌گیری سخت و نرم) را که در سیستم‌های مخابرات نوری مدرن به کار می‌روند، پوشش دهند. مشخصات کلیدی این کدها در جدول ۲ خلاصه شده و در ادامه هر خانواده از کدها به تفصیل معرفی می‌شوند.

جدول ۲- مشخصات ۹ طرح کدگذاری FEC ارزیابی شده

شناسه	نام استاندارد/ طرح	خانواده کد	ساختار	تصمیم‌گیری
کدهای پایه Reed-Solomon				
۱	RS(255, 239) - G.709	Reed - Solo mon	بلوکی ساده	سخت
۴	RS(255, 239) - G.709 Framed	Reed - Solo mon	بلوکی درهم‌بافته	سخت
۸	RS(2720, 2550) - G.975.1	Reed - Solo mon	بلوکی (نرخ بالا)	سخت
کدهای الحاقی (Concatenated)				
۲	RS(255, 239) + CSOC - G.975.1	RS + CSOC	الحاقی (سری)	سخت
کدهای حاصل‌ضربی (Product Codes)				
۳	Product BCH (t=6, t=4)	BCH	حاصل‌ضربی	سخت
۵	G.975.1 I.5 - RS+Prod	RS + Ham ming	الحاقی/ حاصل‌ضرب	سخت
۷	G.975.1 I.7 - Orth. BCH	BCH	حاصل‌ضربی	سخت
۹	G.975.1 I.9 - Int. BCH	BCH	حاصل‌ضربی	سخت
کدهای مدرن (نسل سوم)				
۶	G.975.1 I.6 - LDPC	LDPC	بلوکی	نرم

۴-۱- خانواده کدهای Reed-Solomon (RS)

کد ۱ (RS(۲۳۹, ۲۵۵)) استاندارد پایه: این طرح، یک کد بلوکی Reed-Solomon بر روی میدان گالوا (2^8) است که به عنوان اولین نسل FEC در استاندارد ITU-T G.709 معرفی شد. این کد قادر است تا ۸ بایت خطا را در هر بلوک ۲۵۵ بیتی تصحیح کند. به دلیل پیاده‌سازی ساده و عملکرد قابل قبول در کانال‌های با خطاهای پراکنده، این کد به عنوان یک معیار پایه در این تحقیق در نظر گرفته شده است تا عملکرد طرح‌های پیشرفته‌تر با آن مقایسه شود. کدگشایی آن به صورت تصمیم‌گیری سخت انجام می‌شود [۱۶].

کد ۴ (RS(۲۳۹, ۲۵۵)) در چارچوب G.709: این طرح، پیاده‌سازی عملی‌تر کد RS(۲۳۹, ۲۵۵) در چارچوب استاندارد واحد انتقال نوری (OTU) است. ویژگی کلیدی این طرح، استفاده از جایگردانی بیتی است. در این روش، بلیت‌های چندین کلمه کد

۴-۳- کدهای مدرن با تصمیم‌گیری نرم

کد ۶ (LDPC - I.6 G.975.1): این طرح، یک کد بررسی توازن کم-چگالی مدرن است که نماینده اصلی کدهای نسل سوم FEC می‌باشد. ویژگی برجسته این کد، قابلیت کدگشایی با تصمیم‌گیری نرم از طریق الگوریتم تکراری جمع-حاصل ضرب (Sum-Product) است. این الگوریتم به جای بیت‌های قطعی، از مقادیر احتمالاتی (LLR) استفاده می‌کند که منجر به عملکردی بسیار نزدیک به حد شانون و بهره کدگذاری بسیار بالا می‌شود [۲۰]. این مجموعه متنوع از کدها، پایه‌ای محکم برای یک تحلیل عملکرد مقایسه‌ای جامع فراهم می‌کند که نتایج آن در بخش بعدی ارائه خواهد شد.

۵- نتایج و تحلیل

در این بخش، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عملکرد ۹ طرح FEC ارائه و تحلیل می‌گردد. معیار اصلی ارزیابی، نرخ خطای بیت (BER) به عنوان تابعی از نسبت انرژی بیت به چگالی طیفی نویز (E_b/N_0) است. ابتدا به تحلیل عملکرد انفرادی کدها برای درک تأثیر پدیده‌های غیرخطی پرداخته، سپس نتایج مقایسه‌ای ارائه و در نهایت، بحثی در مورد مصالحه بین عملکرد و پیچیدگی ارائه خواهد شد.

۵-۱- تحلیل عملکرد انفرادی کدها و جریمه عملکرد غیرخطی

برای درک تأثیر تفکیک‌شده‌ی هر یک از عوامل مخرب کانال، عملکرد هر کد در پنج سناریوی نویز ارزیابی شد. به عنوان یک نمونه گویا، در شکل ۲، منحنی‌های عملکرد کد استاندارد RS (۲۵۵،۲۳۹) نمایش داده شده است.

منحنی‌های Pre-FEC (خط چین): نرخ خطای بیت کانال خام را نشان می‌دهند.

منحنی‌های Post-FEC (خط ممتد): عملکرد نهایی سیستم پس از کدگشایی را نشان می‌دهند.

خط پایه (AWGN/GVD): منحنی آبی‌رنگ، عملکرد کد را در یک کانال خطی ایده‌آل (فقط با نویز ASE) به عنوان مرجع نمایش می‌دهد.

با افزودن اثرات غیرخطی، منحنی‌های BER به سمت راست جابجا می‌شوند که به معنای نیاز به E_b/N_0 بالاتر برای دستیابی به همان BER هدف است. این جابجایی افقی، "جریمه عملکرد"^۳ نامیده می‌شود. همانطور که در شکل ۲ مشهود است، اثر SPM (خط سبز) کمترین جریمه و اثر ترکیبی COMBINED ALL EFFECT (خط قرمز) بیشترین جریمه عملکرد را به این کد تحمیل می‌کند. به طور مشخص، برای دستیابی به BER هدف 10^{-5} ، سناریوی واقع‌گرایانه به حدود ۱.۵ دسی‌بل توان بیشتری در

RS قبل از انتقال جایگردان می‌شوند. این کار باعث می‌شود که خطاهای (burst errors) که در کانال نوری رخ می‌دهند، پس از واگردانی^۱ در گیرنده، بین چندین کلمه کد مستقل توزیع شوند و به خطاهای تصادفی قابل تصحیح تبدیل گردند. این ساختار، مقاومت کد را در برابر ماهیت خطاهای کانال نوری افزایش می‌دهد [۱۷].

کد ۸ (RS(2720, 2550): این یک کد Reed-Solomon با نرخ بالا بر روی میدان بزرگ $GF(2^{12})$ است که در استاندارد G.975.1 تعریف شده. این کد با داشتن افزونگی کمتر، برای کلنل‌هایی با کیفیت بهتر طراحی شده که نیاز به تصحیح خطای کمتری دارند اما همچنان از یک FEC پایه بهره‌مند می‌شوند [۲۱].

۴-۲- کدهای الحاقی و حاصل‌ضربی

این خانواده از کدها با ترکیب دو یا چند کد ساده‌تر، به بهره کدگذاری بالاتری دست می‌یابند.

کد ۲ (RS(255,239) + CSOC): این طرح یک کد الحاقی دیگر است که از کد RS(۲۵۵،۲۳۹) به عنوان کد خارجی و یک کد کانولوشنال خود-متعامد (CSOC) به عنوان کد داخلی استفاده می‌کند. CSOC به دلیل ساختار ساده و قابلیت کدگشایی سریع با الگوریتم‌های مبتنی بر رأی‌گیری اکثریت، گزینه‌های جذابی برای کدهای داخلی هستند. این ساختار نیز به صورت تکراری کدگشایی می‌شود تا به عملکرد بهتری دست یابد [۲۲].

کدهای حاصل‌ضربی مبتنی بر BCH (کدهای ۳، ۷ و ۹): این کدها نمونه‌های قدرتمندی از کدهای الحاقی با تصمیم‌گیری سخت هستند. در این ساختار، داده‌ها در یک ماتریس دوبعدی چیده شده و ابتدا تمام سطرها با یک کد (مثلاً BCH) و سپس تمام ستون‌ها با کد دیگری کدگذاری می‌شوند. مزیت اصلی این ساختار، قابلیت کدگشایی تکراری^۲ است. در گیرنده، فرآیند کدگشایی به صورت متناوب بین سطرها و ستون‌ها تکرار می‌شود و در هر مرحله، خطاهای تصحیح‌شده در یک بعد، به بهبود عملکرد کدگشایی در بعد دیگر کمک می‌کند [۱۸]. در این پژوهش سه نسخه متفاوت از این کدها با پارامترهای مختلف (طول بلوک و قابلیت تصحیح خطای متفاوت) برای بررسی تأثیر طراحی کد بر عملکرد نهایی، پیاده‌سازی شده‌اند.

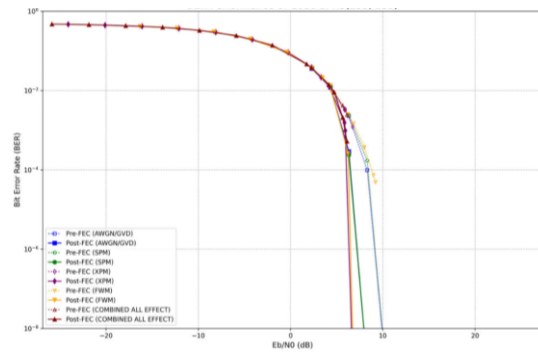
کد ۵ (G.975.1 I.5 - RS+Product Code): این یک ساختار الحاقی بسیار پیچیده از استاندارد G.975.1 است که از یک کد RS خارجی بر روی میدان بزرگ $GF(2^{11})$ یک کد حاصل‌ضربی Hamming داخلی تشکیل شده است. این کد برای دستیابی به بهره کدگذاری بسیار بالا در چارچوب تصمیم‌گیری سخت طراحی شده است [۱۹].

³ Performance Penalty

¹ De-interleaving

² Iterative Decoding

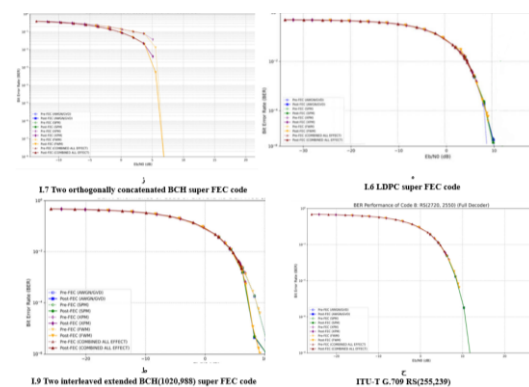
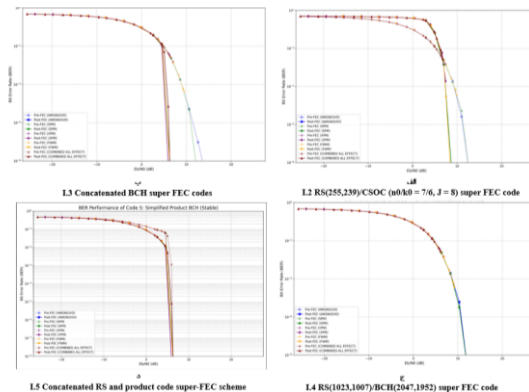
مقایسه با حالت ایده آل AWGN نیاز دارد. این تحلیل نشان می‌دهد که کد RS(255,239) در برابر نویز تداخل غیرخطی آسیب پذیر است.



شکل ۲- منحنی‌های عملکرد کد استاندارد RS(255,239) ITU-T G.709

۲-۵- تحلیل مقایسه‌ای عملکرد کدها

برای رتبه‌بندی طرح‌های مختلف، عملکرد تمام کدها در واقعی‌ترین سناریو، یعنی COMBINED ALL EFFECT، با یکدیگر مقایسه شده است. شکل ۳ منحنی‌های عملکرد تمام ۹ طرح را در این سناریو نمایش می‌دهد و جدول ۳ نتایج کلیدی را به صورت کمی خلاصه می‌کند.



شکل ۳- منحنی‌های عملکرد تمام ۸ طرح استاندارد ITU-T G.975.1

نتایج کمی و کلیدی حاصل از شبیه‌سازی در جدول ۳ خلاصه شده است. این جدول، مقدار E_b/N_0 مورد نیاز برای هر یک از ۹ طرح FEC را برای دستیابی به نرخ خطای بیت هدف 10^{-5} در سخت‌ترین سناریوی شبیه‌سازی (نویز ASE به همراه تمام اثرات غیرخطی ترکیبی) نشان می‌دهد. کدها بر اساس عملکردشان (از بهترین به ضعیف‌ترین) مرتب شده‌اند. همچنین، نوع تصمیم‌گیری (سخت یا نرم) و یک ارزیابی کیفی از پیچیدگی پیاده‌سازی هر کد برای تسهیل تحلیل مصالحه آورده شده است.

جدول ۳- مقایسه کمی عملکرد کدها برای دستیابی به $BER=10^{-5}$ در

سناریوی Combined NLI

شناسه	نام طرح	مورد نیاز E_b/N_0 (dB)	نوع تصمیم‌گیری	پیچیدگی نسبی پیاده‌سازی
۶	G.975.1 1.6 - LDPC	۴.۷	نرم (Soft)	بالا
۵	G.975.1 1.5 - RS+Prod	۵.۹	سخت (Hard)	بالا
۳	Product BCH (t=6, t=4)	۶.۰	سخت (Hard)	متوسط
۹	G.975.1 1.9 - Int. BCH	۶.۱	سخت (Hard)	متوسط
۷	G.975.1 1.7 - Orth. BCH	۶.۱	سخت (Hard)	متوسط
۲	RS(255,239) + CSOC	۶.۸	سخت (Hard)	متوسط
۸	RS(2720, 2550)	۷.۲	سخت (Hard)	پایین
۴	G.709 RS (Framed)	۷.۶	سخت (Hard)	پایین
۱	RS(239, 255)	۷.۸	سخت (Hard)	پایین

از این نتایج مقایسه‌ای، می‌توان چند یافته کلیدی را استخراج کرد:

برتری مطلق کدهای با تصمیم‌گیری نرم: کد ۶ (LDPC) با اختلاف قابل توجهی بهترین عملکرد را ارائه می‌دهد. این کد به دلیل بهره‌گیری از اطلاعات نرم، قادر است در کانال‌های با نویز پیچیده و غیرگوسی، عملکردی نزدیک به حد شانون داشته باشد.

عملکرد قدرتمند کدهای حاصل‌ضربی: کدهای حاصل‌ضربی مبتنی بر BCH (کدهای ۳، ۷ و ۹) و همچنین کد ۵، بهترین عملکرد را در میان کدهای با تصمیم‌گیری سخت از خود نشان می‌دهند. ساختار دوبعدی و کدگذاری تکراری آن‌ها باعث می‌شود تا در مقابله با خطاهای پراکنده و حتی خطاهای (burst errors) ناشی از اثرات غیرخطی، بسیار مؤثر عمل کنند.

پدیده کف خطا^۱: در تحلیل برخی کدها، مانند کد ۵، مشاهده شد که منحنی BER پس از یک بهبود اولیه، به یک سطح اشباع می‌رسد. این پدیده که به "کف خطا" معروف است، یک محدودیت ذاتی در برخی ساختارهای با کدگشایی تکراری سخت است که در آن، الگوریتم کدگشایی قادر به حل برخی الگوهای خطای خاص نیست.

۳-۵- مصالحه بین عملکرد، پیچیدگی و تأخیر

ارزیابی یک طرح FEC تنها بر اساس عملکرد BER آن کامل نیست. هزینه پیاده‌سازی (شامل پیچیدگی محاسباتی، نیاز به حافظه، تأخیر و توان مصرفی) از عوامل تعیین‌کننده در انتخاب عملی یک کد هستند. کد ۶ (LDPC) با وجود عملکرد فوق‌العاده، بیشترین پیچیدگی را دارد. الگوریتم کدگشایی تکراری "جمع-حاصل‌ضرب" نیازمند محاسبات ممیز شناور متعدد و حافظه قابل توجه برای ذخیره پیام‌های LLR است. کدهای جبری مانند Reed-Solomon (کدهای ۱، ۴ و ۸) کمترین پیچیدگی را دارند. الگوریتم‌های کدگشایی آن‌ها غیرتکراری و پیاده‌سازی آن‌ها در سخت‌افزار بسیار بهینه و سریع است. کدهای مبتنی بر BCH (کدهای ۳، ۷ و ۹) یک مصالحه عالی ارائه می‌دهند. آن‌ها با استفاده از ساختار تکراری، به عملکردی بسیار بهتر از کدهای RS ساده دست می‌یابند، بدون آنکه به پیچیدگی محاسباتی کدهای LDPC^۲ نیاز داشته باشند.

۴-۵- اعتبارسنجی مدل شبیه‌سازی

از آنجایی که نتایج این مقاله مبتنی بر شبیه‌سازی است، اعتبارسنجی مدل اهمیت بالایی دارد. برای این منظور، نتایج عملکرد به دست آمده از شبیه‌سازی برای کدهای استاندارد با نمودارها و جداول منتشر شده در سند رسمی ITU-T G.975.1 مقایسه گردید. به عنوان مثال، برای کد الحاقی BCH (مشابه کد ۷)، استاندارد یک بهره کدگذاری خالص (Net Coding Gain) حدود 7.98dB در $BER=10^{-12}$ را گزارش می‌دهد (شکل I.12 در سند). نتایج شبیه‌سازی این پژوهش نیز بهره کدگذاری مشابهی را در این محدوده نشان می‌دهد. همچنین برای کد LDPC (کد ۶)، استاندارد بهره کدگذاری خالص حدود 8.02dB در $BER=10^{-15}$ را گزارش می‌کند (جدول I.7 در سند). نتایج شبیه‌سازی پژوهش نیز به طور دقیقی این روند را تأیید کرده و نشان می‌دهد که منحنی عملکرد کد LDPC از منحنی کدهای RS استاندارد عبور می‌کند، همانطور که در شکل I.19 سند نشان داده شده است. این تطابق قوی بین نتایج شبیه‌سازی و داده‌های مرجع استاندارد، اعتبار مدل کانال و پیاده‌سازی کدهای FEC در این پژوهش را تأیید می‌کند.

۶- محدودیت‌های پژوهش و کارهای آتی

این پژوهش با وجود جامعیت، دارای محدودیت‌هایی است که زمینه‌هایی برای تحقیقات آینده فراهم می‌کند. مدل NLI استفاده‌شده

یک مدل آماری است و پدیده‌های مرتبه دوم مانند پراکندگی حالت قطبش را در نظر نمی‌گیرد. همچنین، این تحلیل تنها برای مدولاسیون BPSK انجام شده است. بر این اساس، این پژوهش با ایجاد یک چارچوب شبیه‌سازی واقع‌گرایانه، مسیرهای جدیدی را برای تحقیقات آینده باز می‌کند. در قدم اول، می‌توان مدل کانال را با در نظر گرفتن فرمت‌های مدولاسیون مرتبه بالاتر مانند QPSK و 16-QAM گسترش داد تا نتایج به سیستم‌های عملی نزدیک‌تر شود. گام بعدی می‌تواند ارزیابی کدهای جدیدتر مانند کدهای قطبی (Polar Codes) باشد که به عنوان رقبای اصلی LDPC در استانداردهای 5G مطرح شده‌اند. علاوه بر این، می‌توان از این چارچوب برای بهینه‌سازی مشترک پارامترهای کد FEC و پارامترهای سیستم انتقال (مانند توان ورودی) جهت دستیابی به نقطه کار بهینه استفاده کرد. در نهایت، مهم‌ترین مسیر آتی، زمینه شناسایی کور کدها با هوش مصنوعی است؛ داده‌های عملکردی دقیق تولید شده در این تحقیق ("امضای عملکردی" هر کد) می‌تواند به عنوان یک مجموعه داده آموزشی غنی برای توسعه الگوریتم‌های یادگیری ماشین جهت شناسایی نوع کد FEC در یک سیگنال نوری ناشناس به کار رود که گامی مهم در جهت تحقق گیرنده‌های هوشمند و شناختی خواهد بود.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک تحلیل عملکرد جامع و مقایسه‌ای از ۹ طرح کدگذاری FEC در یک کانال فیبر نوری غیرخطی ارائه گردید. نتایج شبیه‌سازی، که با داده‌های استاندارد ITU-T اعتبارسنجی شدند، به وضوح نشان دادند که نویز تداخل غیرخطی یک عامل محدودکننده جدی است. در میان تمام طرح‌ها، کد LDPC (کد ۶) با بهره‌گیری از تصمیم‌گیری نرم، به طور قاطع بهترین عملکرد را از خود نشان داد. در میان کدهای با تصمیم‌گیری سخت، کدهای حاصل‌ضربی مبتنی بر BCH (کدهای ۳، ۷ و ۹) بهترین مصالحه را بین عملکرد قوی و پیچیدگی پیاده‌سازی متوسط ارائه دادند. این یافته‌ها، اهمیت حیاتی استفاده از کدهای پیشرفته و همچنین در نظر گرفتن یک راهنمای عملی برای انتخاب بهینه‌ترین ساختار FEC بر اساس نیازمندی‌های عملکردی و محدودیت‌های پیاده‌سازی را برای طراحان سیستم‌های نوری نسل آینده تأیید می‌کند.

۵- مراجع

- [1] A. J. Viterbi, "Wireless digital communication: a view based on three lessons learned," IEEE Communications Magazine, vol. 29, no. 9, pp. 33-36, Sep. 1991.
- [2] D. J. Richardson, J. M. Fini, and L. E. Nelson, "Space-division multiplexing in optical fibres," Nature Photonics, vol. 7, no. 5, pp. 354-362, 2013.
- [3] G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, 6th ed. Academic Press, 2019.

² Low-Density Parity-Check

¹ Error Floor

- [4] ITU-T Recommendation G.975.1, "Forward error correction for high bit-rate DWDM submarine systems," International Telecommunication Union, 2020.
- [5] P. J. Winzer, "Optical Networking Beyond 100G," *IEEE Communications Magazine*, vol. 52, no. 1, pp. 26-27, Jan. 2014.
- [6] T. Eriksson, T. Fehenberger, P. A. Andrekson, M. Karlsson, N. Hanik and F. M. J. Willems, "Impact of FEC Limit on the Performance of Fiber-Optic Communication Systems," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 35, no. 21, pp. 4642-4649, Nov. 2017.
- [7] T. Mizuochi, "Recent Progress in Forward Error Correction for Optical Communication Systems," *IEICE Transactions on Communications*, vol. E88-B, no. 5, pp. 1934-1946, May 2005.
- [8] R. M. Pyndiah, "Near-optimum decoding of product codes: block turbo codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 8, pp. 1003-1010, Aug. 1998.
- [9] G. Liga, A. Sheikh, A. Alvarado and P. Bayvel, "On the Performance of Spatially Coupled LDPC Codes in Coherent Optical Systems," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 35, no. 2, pp. 280-287, Jan. 2017.
- [10] D. Semrau, T. A. Eriksson, M. Karlsson, E. Agrell, and P. Bayvel, "Achievable Information Rates for Nonlinear Fiber Communication With Deep Learning," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 38, no. 4, pp. 838-850, Feb. 2020.
- [11] A. D. Ellis et al., "Nonlinear effects in optical communications," *Reports on Progress in Physics*, vol. 80, no. 5, p. 056401, 2017.
- [12] R. Dar, M. Feder, A. Mecozzi, and M. Shtaif, "Properties of nonlinear noise in long, dispersion-unmanaged fiber-optic links," *Optics Express*, vol. 22, no. 12, pp. 14199-14211, 2014.
- [13] S. Kumar, "Four-Wave Mixing in Optical Fibers: A Review," *Journal of Optics*, vol. 48, no. 3, pp. 317-333, 2019.
- [14] M. A. Pour, H. M. H. Shalaby, and M. H. Aly, "A Unified Analytical Model for Nonlinear Interference Power in WDM Systems," *IEEE Photonics Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 1-13, Feb. 2020.
- [15] E. Desurvire, *Erbium-Doped Fiber Amplifiers: Principles and Applications*. John Wiley & Sons, 2002.
- [16] S. B. Wicker and V. K. Bhargava, Eds., *Reed-Solomon Codes and Their Applications*. IEEE Press, 1994.
- [17] G. Bosco, V. Curri, and P. Poggiolini, "Performance Limits of Nyquist-WDM Systems Using RS(255,239) and Hard-Decision FEC," in *Optical Fiber Communication Conference (OFC)*, 2013, paper OTh3E.3.
- [18] J. Hagenauer, E. Offer, and L. Papke, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 429-445, Mar. 1996.
- [19] A. R. Iyengar, P. A. Voois and M. P. C. Fossorier, "Concatenated coding for optical communication systems," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 609-617, Feb. 2004.
- [20] D. J. C. MacKay, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 2, pp. 399-431, Mar. 1999.
- [21] Y. Cai, A. N. Pilipetskii, M. A. G. B. V. G. K. S. M. F. and A. K. A. L. N., "Next Generation FEC for High-Capacity Optical Communication Systems," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 37, no. 7, pp. 1654-1664, April 2019.
- [22] J. Li, K. R. Narayanan, and C. N. Georghiadis, "Product-like codes based on convolutional self-orthogonal codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 55, no. 4, pp. 679-688, April 2007.